Методическая разработка по теме
«Вычислительный эксперимент на уроках математики в старшей профильной школе» (2022-23 уч.г.)

Сведения об авторах:

Симакова Марина Николаевна, учитель математики МАОУ Лицей №1 г.Южно-Сахалинска. Стаж работы 37 лет. Специальность – учитель математики и физики.

Симаков Егор Евгеньевич, учитель информатики МАОУ Лицей №1 г.Южно-Сахалинска. Стаж работы 11 лет. Специальность – математик, системный программист; аспирантура 13.00.02 - Теория и методика обучения и воспитания.

Актуальность темы:

Современный период информатизации общества и образования определяет необходимость обновления и совершенствования методики обучения математике в школе, о чем свидетельствует содержание Концепции развития математического образования в Российской Федерации. В сфере образования происходит глубокая интеграция информатики во все учебные предметы. Одной из форм внедрения ИКТ в преподавание математики являются вычислительные эксперименты и моделирование, основная задача которых - усиление практической направленности школьного курса математики, то есть осуществление связи его содержания и методики обучения с практикой.

Вопросами определения роли и места вычислительного эксперимента и моделирования в методике преподавания математики в нашей стране занимаются такие ученые, как А.С. Самарский, В.А. Далингер, В.Н. Дубровский, В.И. Рыжик, Т.Ф. Сергеева, М.В. Шабанова, Г.Б. Шабат, и др. Основным направлением их исследований является определение условий использования эксперимента на различных этапах изучения учебного материала с учетом закономерностей развития теоретического мышления. Еще одно направление педагогических исследований

– организация учебно-исследовательской деятельности школьников с применением моделирования (Д.Б. Богоявленская, П.В. Середенко, В.А. Сластенин, А.В. Хуторский, А.И. Савенков, А.В. Леонтович).

Однако анализ научно-методической и психолого-педагогической литературы обнаруживает следующие **противоречия:**

- между необходимостью освоения в школе приемов программирования и вычислительных экспериментов и моделирования для осуществления связи содержания математического образования и методики обучения с практикой и отсутствием нужных методик;
- между высоким уровнем активности учащихся на этапе получения новых знаний методом вычислительного эксперимента и моделирования и их пассивностью при объяснении новой темы традиционными методами;
- между наличием экспериментальных данных о содержании субъектного (доучебного) опыта учащихся, связанного с оценкой истинности утверждений с использованием наблюдений и экспериментов, и методикой обучения, не учитывающей эти особенности содержания субъектного опыта.

На основе выявленных противоречий определена **тема разработки**: проведение вычислительного эксперимента на уроках математики в старшей профильной школе.

Теоретическое обоснование и основная педагогическая идея:

Вычислительный эксперимент рассматривается как наиболее высокая ступень математического моделирования, порожденная преобладающим использованием компьютеров и численных методов для изучения математических моделей. В настоящее время математическое моделирование и вычислительный эксперимент, без сомнения, входят в число важнейших проблем использования математических знаний и применения компьютера в различных областях человеческой практики. То есть речь идет о практико-ориентированном обучении.

Теоретическое обоснование необходимости изучения методологии математического моделирования и вычислительного эксперимента дано в исследованиях Ю.П. Попова, Л.Б. Рахимжановой, А.В. Рябых, А.А. Самарского и других авторов. А.Г. Гейн, Л.П. Глазова, Е.К. Хеннер, А.П. Шестаков знакомят с процессом вычислительного эксперимента учащихся школы и студентов вузов.

Потребность обучения вычислительному эксперименту со школьного возраста обусловлена причинами:

1) основой вычислительного эксперимента является математическое моделирование, теоретической базой - прикладная математика, а технической — компьютеры;

2) вычислительный эксперимент сводится к экспериментированию с математической моделью, варьированию параметрами, «проигрыванию» с помощью модели различных ситуаций.

Авторами разработана методика формирования умений, связанных с проведением вычислительных экспериментов при изучении математики с использованием ИКТ, учебные материалы для практической реализации этой методики и апробации в МАОУ Лицей №1 г.Южно-Сахалинска.

Востребованность, практическая значимость и, вместе с тем, недостаточная разработанность данной темы определили **основную педагогическую идею:** внедрение вычислительных экспериментов моделирования на уроках математики в 10-11 классах дает возможность, с одной стороны, теоретические сведения, изучаемые на уроках, подтверждать экспериментально, в практических исследованиях. С другой стороны, проводимые вычислительные эксперименты помогают делать выводы о свойствах фигур, функций, доказывать теоремы и др. Математические знания становятся не просто словами, но обретают форму, становятся осязаемыми. Связь теории и практики в данной методике преподавания позволяет говорить о практико-ориентированном обучении. Это одно из требований Концепции математического образования.

Вычислительные эксперименты являются эффективным средством формирования знаний и умений, связанных с изучением теоретического материала и решением математических задач, поскольку:

- разработка алгоритмов их проведения требует широкого использования понятий и определений школьного курса математики;
- результаты вычислительных экспериментов позволяют установить взаимосвязи свойств изучаемых понятий и объектов;
- открытые средствами вычислительных экспериментов факты требуют привлечения математических знаний в качестве объяснительной основы наблюдаемых явлений;
- эксперименты облегчают учащимся способ восприятия учебного материала с помощью объяснения учителя и привлечения учебника;
- они позволяют развернуть ход рассуждений во времени, представить его с той или иной полнотой, которая необходима для помощи учащемуся.

Цель предлагаемой методики: выявить теоретические и методические основы формирования умений, связанных с проведением вычислительных экспериментов при обучении математике учащихся средней школы с использованием моделирования.

Задачи:

1. Проанализировать психолого-педагогическую, методическую и специальную литературу и теоретически обосновать целесообразность внедрения вычислительных экспериментов в преподавание математики в основной и средней школе.
2. Уточнить содержание понятия «вычислительный эксперимент», проводимого с использованием 3-D моделирования. Определить роль и место вычислительных экспериментов в обучении математике.
3. Спроектировать и обосновать модель формирования умений, связанных с проведением вычислительных экспериментов при обучении математике,

которая обеспечит интеграцию содержания субъектного опыта учащихся с опытом аргументации утверждений в любой области знаний.

4. Разработать педагогические условия практической реализации модели поэтапного формирования умений, связанных с проведением вычислительных экспериментов при обучении математике в средней школе.
5. Экспериментально проверить эффективность методики обучения приемам вычислительных экспериментов при изучении математики с использованием 3-D моделирования.

Для решения поставленных задач использованы **методы исследования**:

1. Теоретические: анализ, синтез и обобщение методологической, психолого-педагогической, методической и специальной литературы по проблеме исследования; изучение нормативной и программно-методической документации об общем образовании; проектирование модели подготовки учащихся в области информатики с применением вычислительных экспериментов и моделирования.
2. Эмпирические: педагогическое наблюдение, анкетирование, тестирование, поэлементный и компонентный анализ ответов, экспертная оценка результатов деятельности по формированию приемов вычислительных экспериментов, педагогический эксперимент.
3. Математические: статистическая обработка данных эксперимента, графические и табличные интерпретации данных.

Для сбора и анализа эмпирической информации применялись **частные психодиагностические методики**:

1. Анализ результатов деятельности ученика (К. Ингенкамп).
2. Определение готовности к обучению исследовательским навыкам и к исследовательской деятельности (П.В. Середенко; И.Ю. Гутник).
3. Определение уровня готовности к обучению с применением метапредметного подхода (трехуровневая диагностика Е.С. Аскомовец, А.М. Митина).

4. Определение уровней творческого мышления (И.С. Аверина) и логического мышления (Д. Равен).
5. Обработка результатов педагогического исследования (Н.В. Бордовская).
6. Применение методов математической статистики, включая сравнение между собой средних выборочных величин (t-критерий Стьюдента).
7. Диагностика уровня знаний, умений и навыков (критерий Вилкоксона).
8. Мониторинг успеваемости (В.В. Гузеев).
9. Анализ результатов методом сводных показателей по разработанным критериям (Н.В. Хованов).

Контрольно-диагностические методы позволили по результатам анкетирований и тестирований составить итоговые таблицы в программе Statistical Package for the Social Sciences (SPSS, статистический пакет для социальных наук) и сделать вывод об эффективности применения разработанной системы формирования приемов вычислительных экспериментов в педагогическом процессе.

Научная новизна методики состоит в том, что:

- разработаны положения, определяющие роль и значение вычислительных экспериментов с использованием моделирования в преподавании математики;
- разработана модель применения метапредметного подхода к преподаванию математики в процессе формирования умений вычислительных экспериментов у учащихся;
- обоснована и разработана технология формирования умений вычислительных экспериментов на основе применения метапредметного подхода в педагогическом процессе (через систему интегрированных уроков, спецкурсов по программированию и организацию исследовательской работы с вычислительными экспериментами);
- выявлены педагогические условия успешного формирования умений вычислительных экспериментов с использованием моделирования и условия повышения качества знаний учащихся;

- разработан диагностический инструментарий и определены критерии уровней освоения приемами программирования и вычислительных экспериментов.

Теоретическая значимость:

- разработаны концептуальные положения формирования приемов вычислительных экспериментов на основе метапредметного подхода в педагогическом процессе:

- создание оптимальных условий для развития мышления учащихся на основе интеграции;

- развитие мотивации учащихся к обучению;

- учет специфики вычислительных экспериментов и 3-Д моделирования (сложность и многоаспектность, быстрые темпы развития и широта использования);

- возможность выбора индивидуального маршрута обучения и проведения исследований;

- определены принципы технологии обучения математике через систему интегрированных уроков, спецкурсов и организацию учебно-исследовательской работы (системности, научности, интегрированности, дифференцированности, технологичности и др.);
- разработана оригинальная система обучения приемам вычислительных экспериментов и 3-Д моделирования в САПР Компас 3-Д;
- выявлены организационно-методические условия применения метапредметного подхода к преподаванию математики;
- разработана методика применения программ RealFlow, Golden Software Surfer, Grapher, MathCAD, LabVIEW для проведения вычислительных экспериментов.

Практическая значимость:

- в создании и экспериментальной проверке новой технологии обучения математике, способствующей формированию высокого уровня качества знаний, умений, навыков и компетенций учащихся;

- в разработке и внедрении в учебный процесс программы формирования приемов вычислительных экспериментов с использованием моделирования;
- в определении принципов обучения приемам вычислительных экспериментов по выбранным индивидуальным маршрутам:

- соответствие объекта изучения современному уровню развития вычислительных экспериментов и моделирования;
- формирование практического опыта проведения вычислительных экспериментов;
- реализация блочно-уровневого содержания обучения;
- сочетание исследовательских, экспериментальных форм обучения;
- доступность содержания обучения возрастным особенностям обучаемых;
- унификация приемов работы в САПР Компас 3-Д;

- разработанная технология и результаты исследования могут быть использованы в учебном процессе, а также в системе повышения квалификации педагогических кадров.

Достоверность и обоснованность полученных результатов определяются методологическим, общенаучным и методическим обеспечением процесса исследования; методической целостностью экспериментальной работы; применением комплекса методов, адекватных целям и задачам исследования; сочетанием теоретических и эмпирических методов исследования, качественными и количественными показателями результативности технологии обучения математике и физике на основе метапредметного подхода; достаточной репрезентативной выборкой.

Суть вычислительного эксперимента состоит в том, что по одним параметрам математической модели объекта (процесса) вычисляются другие её параметры и на этой основе делаются выводы о свойствах объекта (процесса). На схеме представлен технический цикл вычислительного эксперимента:

Эксперимент начинается с формулировки проблемы и изложения целей (этап I). Принятие гипотез исследования - этап II. При построении имитационной модели системы (этап III) возникает несколько проблемных вопросов: уровень сложности математической модели; продолжительность программирования; адекватность модели, отличающая эксперимент от упражнения. Этап IV - разработка программного обеспечения эксперимента. Программное обеспечение базируется на комплексах и пакетах прикладных программ, включающих в себя библиотеки программных модулей. Комплекс программ предназначен для решения близких по своей математической природе задач из одной предметной области. Пакеты прикладных программ, рассматриваемые как технология решения задач в рамках вычислительного эксперимента, позволяют наиболее эффективно использовать накопленный программный продукт. На этапе V идет планирование эксперимента для сокращения числа вычислительных прогонов, их продолжительности, количества наблюдаемых переменных, шагов изменения параметров и т.д. Выработка решений по управлению экспериментом (этап VI) основана на оценке гипотезы о поведении исследуемой системы, отладке имитационной модели и построении алгоритма организации эксперимента. Имитационный эксперимент (этап VII) — это проведение серии расчетов по разработанному алгоритму. В результате образуются ряды статистических данных (выборки). К основным методам обработки данных относятся методы математической статистики: дисперсионный анализ, спектральный анализ и эвристические процедуры. Затем результаты представляют в компактной форме, выдают рекомендации и делают заключение (этапы VIII и IX).

Для проведения вычислительных экспериментов в лицее создан мобильный компьютерный класс, в состав которого входят 15 ученических ноутбуков и ноутбук преподавателя, объединенных в локальную сеть. По сети учитель дает задания каждому учащемуся, затем все участники эксперимента обмениваются идеями, проводят расчеты и анализируют их с помощью теоретических сведений. Полученные данные поступают на компьютер преподавателя. Затем идет обработка полученных результатов. Имеющиеся портативный проектор, видеокамера позволяют наглядно представить опытные данные. Результаты работы учащиеся оформляют в виде рефератов и проектов на конференциях.

Одной из форм организации процесса формирования приемов вычислительных экспериментов является исследовательская работа: лабораторно-практические работы, практикумы и опыты, семинары. Дидактические цели таких занятий – экспериментальное подтверждение теоретических положений, изученных на уроках; овладение техникой эксперимента, умением решать практические задачи путем постановки опытов и т.п. Наиболее высоким уровнем формирования приемов вычислительных экспериментов является приобретенная учащимися метапредметная форма стойкой информационно-коммуникативной компетенции. Как видно из схемы, в этой компетенции выделяют две составляющие:

Информационно-коммуникативная компетенция

Предметная:
первично-предметное знание дисциплин «информатика» и «программирование»

Метапредметная:
- общеобразовательная;
- базовая;
- профильно-ориентированная;

Предметная составляющая ориентирована на изучение информатики как науки и области практической деятельности. Метапредметная включает несколько компетенций. Первые две из них формируются в ходе изучения базового курса информатики. Третья и четвертая возникают в процессе углубленного изучения информатики и учебно-исследовательской работы в области приложений ИКТ и программирования.

На уроках широко используются программы MS Excel, Golden Software Grapher и утилита MS Equation. Изучается система автоматизированного проектирования (САПР) MathCAD и САПР Компас 3-Д. Самостоятельная разработка учащимися алгоритмов моделирования требует затрат времени и выходит за рамки урока. Этим обусловлено введение в преподавание математики спецкурсов. Учебно-исследовательская деятельность – это совокупность элементов, связей и отношений в конкретной научной области, направленных на решение актуальной проблемы. В отличие от научного, учебное исследование характеризуется созданием особых условий, при которых учащиеся исследуют уже известные объекты, свойства и явления окружающей действительности. За основу авторской методики обучения исследовательским умениям и навыкам вычислительных экспериментов принята система развивающего обучения. Цель обучения – готовность к саморазвитию, а основной метод обучения - деятельностный метод. Для развития исследовательских способностей учащихся в ходе специальных тренинговых занятий составлена программа, в которой учебный материал структурирован по принципу концентрических кругов: изучение компьютерных программ PowerPoint, NoteBook, Excel, MathCAD, RealFlow и др.; изучение основных тем математики и физики с использованием средств ИКТ; знакомство с метапредметным подходом к изучению математических понятий; изучение основ 3-Д моделирования. В программу включены четыре более мелкие подпрограммы, являющиеся автономными. Подпрограммы изучаются последовательно. Содержание подпрограмм постепенно усложняется и расширяется.

Для определения эффективности предложенной методики была разработана система диагностических процедур по отслеживанию процесса формирования приемов вычислительных экспериментов и моделирования в средней школе.

Цели предлагаемой диагностики:

1. Оптимизировать процесс индивидуального обучения;
2. Определить результаты деятельности ученика по овладению приемами вычислительных экспериментов и качество образования;
3. Свести к минимуму ошибки, допускаемые в процессе обучения.

Виды применяемой устной диагностики: опрос, сообщение, зачет, защита проекта или реферата. Виды письменной диагностики: реферат, контрольная работа, отчет о проведенной лабораторной работе, о вычислительном эксперименте, о практической работе. Виды графической диагностики: компьютерные презентации, программы для изучения математики и физики, анализ результатов проведенных экспериментов с помощью компьютерных программ. Виды рейтинговой диагностики: по методам исследовательской работы и алгоритмам проведенных исследований. Психологическая диагностика: тестирование и наблюдение.

Система диагностики оценивает степень овладения научно-теоретическими знаниями (теоретический компонент); приемами практической учебной исследовательской деятельности с применением программирования и вычислительных экспериментов (практический компонент); степень психологической готовности учащихся (психологический компонент). Затем каждому ученику выводится общая оценка по итогам трех составляющих. Анализ литературы дал возможность разработать критерии для определения уровней готовности учащихся к изучению учебного материала по математике и физике с применением метапредметного подхода. Для характеристики уровней готовности использована методика Л.М. Митиной и Е.С. Асмаковец. Уровней готовности в ней выделено три: минимальный, оптимальный, повышенный.

Весь диагностический инструментарий состоит из семи разделов:

1. Диагностика теоретической готовности. В тесте 20 заданий разного уровня. Наибольшее количество баллов – 38, наименьшее – 0.

2. Диагностика уровня развития исследовательских умений и навыков. В разделе содержится 30 заданий. Максимальное количество баллов – 64, минимальное – 0.
3. Диагностика поисковой активности (по трем уровням): 1балл, 2 балла, 3 балла.
4. Диагностика творческого мышления. Всего предложено 45 заданий. Наибольшее количество баллов – 96, наименьшее – 28.
5. Диагностика логического мышления. Из 20 логических задач наибольшее возможное количество баллов – 60, наименьшее – 10.
6. Диагностика психологической готовности. Включено 20 заданий. Максимальное количество баллов – 64, минимальное – 20.
7. Диагностика поведения учащихся в исследовательском обучении (по трем уровням): 1балл, 2 балла, 3 балла.

Каждый из семи разделов может быть выполнен на низком, среднем или высоком уровне. Для удобства обработки большого количества данных выводится средний показатель готовности учащихся к проведению вычислительных экспериментов, усвоению приемов программирования и занятию исследовательской работой. Для этого используется алгоритм:

- Вычислить наибольшее Smax и наименьшее Smin значение сумм баллов по каждому из разделов.
- Распределить полученные суммы по трем уровням готовности: присваивают коэффициент 0,45 верхней границе низкого уровня U1 и коэффициент 0,75 верхней границе среднего уровня U2. Для определения границ используются формулы: Smin+ (Smax – Smin) * 0,45 = U1; Smin+ (Smax – Smin) * 0,75 = U2. Значения показателей уровней будут описаны неравенствами: низкий уровень<U1; U1<средний уровень< U2; U2 <высокий уровень.

Например, диагностика уровня развития исследовательских умений и навыков. В разделе 30 заданий. Smax=64, Smin=0. Считаем по формулам U1 и U2. Получим, что промежуток значений, не больших 29 баллов, относится к минимальному уровню, от 30 до 48 баллов – к среднему уровню, свыше 48 баллов – к высокому уровню готовности. Рассчитав показатели по каждому разделу, можно вычислить оценку готовности учащихся к проведению вычислительных экспериментов, усвоению приемов программирования и занятию исследовательской работой в целом. При этом низкий уровень равен условному коэффициенту 1; средний уровень – 2; высокий уровень - 3. Тогда минимальная сумма средних показателей равна 7, а максимальная – 21. По формулам для определения U1 и U2: низкий (минимальный) уровень – не больше 13; средний (общий) уровень – от 14 до 18; высокий (продвинутый) уровень – не менее 19. Средние показатели отдельных компонентов готовности по разделам:

Раздел	Сумма баллов		Уровень			Кол-во заданий
	минимальный	максимальный	низкий	средний	высокий	
1). научно-теоретические знания	0	38	не больше 17	от 18 до 29	больше 29	20
2). исследовательские умения	0	64	не больше 29	от 30 до 48	больше 48	30
3). поисковая активность	индивидуальный показатель в одном из уровней		минима-льный 1 балл	оптималь- ный 2 балла	повышен-ный 3 балла	
4). творческое мышление	28	96	не больше 59	от 60 до 79	больше 79	45
5). логическое мышление	10	60	не больше 33	от 34 до 48	больше 49	20
6). психологическая готовность	20	64	не больше 40	от 41 до 53	больше 53	20
7). поведение учащихся в исследовательском обучении	индивидуальный показатель в одном из уровней		минималь-ный 1 балл	оптималь-ный 2 балла	повышен-ный 3 балла	

Согласно разработанной технологии составляются индивидуальные карты достижений учащихся. В них каждому ученику по общему количеству набранных баллов определен уровень усвоения материала по темам. Например,

ФАМИЛИЯ, ИМЯ учащегося *Иванова Полина*	Название темы *Решение квадратных уравнений*
Название раздела	Кол-во баллов
Теоретические знания	19
Практические умения	28
Психологическая готовность	2
общее кол-во баллов	49

По индивидуальным картам составляется сводная таблица результатов всего класса по учебным предметам (с указанием баллов по основным темам):

№	ФИ учащихся	Кол-во баллов
1.	*Иванова Полина*	49
2.		
3.		
...		

Анализ результатов диагностик показывает, что обучение математике через систему интегрированных уроков, спецкурсов и исследовательскую работу с вычислительными экспериментами и 3-Д моделирование дает положительный результат и развивает творческие способности учащихся.

Для оценки качества обучения вычислительным экспериментам при дифференциации учащихся по начальным уровням знаний, способностям, возможностям и интересам определяющими являются положения:

- учет уровней до начала обучения и по окончании каждого учебного года;
- определение вопросов (заданий), которые оценивают каждый уровень;

- "качество" ответа на вопрос выбирается из трех значений (0 - не решено; 1 - решено не полностью; 2 - решено полностью).

Результаты диагностирования уровня сформированности приемов вычислительных экспериментов у учащихся отражены в таблицах.

Результаты входной работы (9 класс):

№	Ф.И.О.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	А. Дмитрий	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	2	2
2	А. Анастасия	1	2	0	1	2	1	2	2	1	0	1	2	1	1
3	Д. Елизавета	1	2	1	0	1	2	2	1	2	1	2	2	2	0
4	Д-ц Елизавета	2	1	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2
5	Д. Елена	2	1	1	0	2	1	2	1	2	0	1	1	2	1
6	З. Лилия	1	2	0	2	1	2	1	2	2	1	1	2	1	2
7	К. Руслан	2	2	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	2	2
8	К. Елизавета	2	2	1	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2
9	К. Виталий	2	2	1	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2
10	Р. Александр	1	1	2	2	2	2	1	2	2	1	1	2	2	1
11	С. Артем	2	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	2	2	1
12	С. Анастасия	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	0
13	С. Юлия	2	1	1	2	2	2	2	1	0	2	2	2	1	1
14	К. Владислав	1	2	0	2	2	1	2	2	1	2	2	2	2	2
15	С. Иван	1	1	1	2	2	2	2	1	2	2	2	2	1	2

Результаты итоговой работы (9 класс):

№	Ф.И.О.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	А. Дмитрий	2	2	2	2	2	2	2	1	2	1	1	2	2	2	1	1	1	2
2	А. Анастасия	2	2	2	0	2	0	0	1	1	2	1	2	2	2	1	2	0	2
3	Д. Елизавета	2	2	0	2	2	2	2	2	1	2	2	0	2	2	2	2	1	1
4	Д-ц Елизавета	2	2	2	2	0	2	2	2	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2
5	Д. Елена	2	0	2	2	2	0	2	1	0	2	0	1	1	2	1	2	1	1
6	З. Лидия	2	2	2	0	2	2	2	2	1	2	1	2	2	2	1	2	1	2
7	К. Руслан	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	2	2
8	К. Елизавета	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2
9	К. Виталий	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	1	2	2	2	2	2	2
10	Р. Александр	2	0	2	2	0	2	2	2	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
11	С. Артем	2	0	2	2	2	2	2	2	0	2	1	1	2	1	0	1	2	1
12	С. Анастасия	0	2	2	2	2	2	2	0	1	2	1	2	2	1	1	1	2	1
13	С. Юлия	0	2	2	2	2	2	2	1	1	1	2	1	2	2	2	1	2	2
14	К. Владислав	2	0	2	2	2	2	2	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	2
15	С. Иван	1	1	2	0	1	1	1	2	0	2	2	2	1	1	2	2	2	2

Результаты итоговой работы (10 класс):

№	Ф.И.О.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	А. Дмитрий	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	1	2	1
2	А. Анастасия	1	2	2	2	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	1
3	Д. Елизавета	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	1	2	1	2
4	Д-ц Елизавета	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2
5	Д. Елена	2	2	2	2	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	2
6	З. Лидия	1	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2
7	К. Руслан	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
8	К. Елизавета	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	1
9	К. Виталий	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2
10	Р. Александр	2	1	2	2	2	2	1	2	1	2	2	1	1	2	1
11	С. Артем	2	1	2	2	2	2	1	2	2	2	1	1	2	1	1
12	С. Анастасия	1	2	2	2	2	2	1	2	2	2	1	1	2	1	1
13	С. Юлия	2	2	2	2	2	2	2	1	2	1	2	1	2	2	1
14	К. Владислав	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2
15	С. Иван	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1

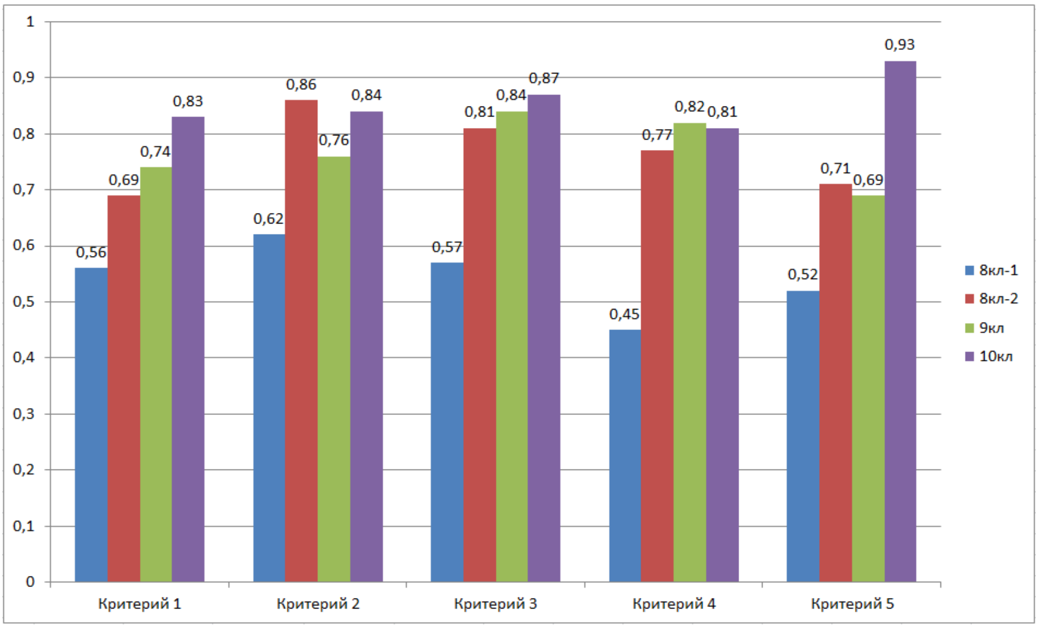
№ п/п	Ф.И.О.	Критерий 1				Критерий 2				Критерий 3				Критерий 4				Критерий 5				Среднее			
		8кл-1	8кл-2	9кл	10 кл	8кл-1	8кл-2	9кл	10 кл	8кл-1	8кл-2	9кл	10 кл	8кл-1	8кл-2	9кл	10 кл	8кл -1	8кл -2	9кл	10 кл	8кл-1	8кл-2	9кл	10 кл
1	А. Дмитрий	0,59	0,78	0,71	0,71	0,95	0,94	0,63	0,95	0,79	0,70	0,94	0,95	0,67	0,70	0,78	0,71	0,67	0,82	0,81	0,95	**0,73**	**0,79**	**0,77**	**0,85**
2	А. Анастасия	0,59	0,31	0,71	0,48	0,48	0,70	0,63	0,63	0,48	0,94	0,31	0,95	0,38	0,47	0,94	0,71	0,29	0,59	0,60	0,95	**0,44**	**0,60**	**0,64**	**0,74**
3	Д. Елизавета	0,59	0,78	0,94	0,71	0,95	0,94	0,63	0,95	0,63	0,47	0,94	0,95	0,48	0,47	0,94	0,71	0,57	0,71	0,60	0,95	**0,64**	**0,67**	**0,81**	**0,85**
4	Д-ц Елизавета	0,83	0,78	0,94	0,95	0,71	0,94	0,94	0,95	0,32	0,94	0,63	0,95	0,67	0,94	0,78	0,83	0,57	0,82	0,87	0,95	**0,62**	**0,88**	**0,83**	**0,93**
5	Д. Елена	0,59	0,47	0,71	0,71	0,71	0,70	0,63	0,63	0,32	0,70	0,63	0,71	0,38	0,23	0,78	0,83	0,19	0,71	0,40	0,95	**0,44**	**0,56**	**0,63**	**0,77**
6	З. Лидия	0,59	0,63	0,71	0,95	0,48	0,70	0,78	0,63	0,63	0,70	0,94	0,95	0,38	0,94	0,94	0,95	0,48	0,47	0,67	0,95	**0,51**	**0,69**	**0,81**	**0,87**
7	К. Руслан	0,71	0,78	0,71	0,95	0,71	0,94	0,94	0,95	0,79	0,70	0,94	0,95	0,57	0,94	0,78	0,95	0,86	0,94	0,81	0,95	**0,73**	**0,86**	**0,84**	**0,95**

8	К. Елизавета	0,77	0,78	0,71	0,71	0,48	0,94	0,94	0,95	0,79	0,94	0,94	0,95	0,57	0,94	0,94	0,83	0,57	0,82	0,87	0,95	**0,64**	**0,88**	**0,88**	**0,88**
9	К. Виталий	0,77	0,78	0,94	0,95	0,83	0,94	0,94	0,95	0,48	0,94	0,94	0,95	0,67	0,94	0,94	0,83	0,86	0,82	0,81	0,95	**0,72**	**0,88**	**0,91**	**0,93**
10	Р. Александр	0,53	0,63	0,94	0,71	0,48	0,94	0,63	0,79	0,48	0,94	0,63	0,71	0,29	0,94	0,78	0,71	0,38	0,59	0,67	0,83	**0,43**	**0,81**	**0,73**	**0,75**
11	С. Артем	0,42	0,78	0,24	0,48	0,71	0,94	0,63	0,79	0,79	0,94	0,94	0,71	0,19	0,47	0,94	0,83	0,67	0,82	0,54	0,83	**0,56**	**0,79**	**0,66**	**0,73**
12	С. Анастасия	0,48	0,47	0,47	0,48	0,59	0,94	0,63	0,63	0,32	0,94	0,94	0,71	0,19	0,94	0,63	0,83	0,29	0,71	0,67	0,95	**0,37**	**0,80**	**0,67**	**0,72**
13	С. Юлия	0,65	0,63	0,94	0,71	0,24	0,70	0,78	0,95	0,63	0,70	0,94	0,95	0,38	0,94	0,47	0,71	0,29	0,71	0,74	0,95	**0,44**	**0,74**	**0,77**	**0,85**
14	К. Владислав	0,59	0,78	0,71	0,95	0,48	0,94	0,78	0,95	0,32	0,94	0,94	0,71	0,57	0,70	0,94	0,83	0,67	0,59	0,67	0,83	**0,53**	**0,79**	**0,81**	**0,85**
15	С. Иван	0,53	0,94	0,71	0,71	0,48	0,70	0,94	0,95	0,79	0,70	0,94	0,95	0,38	0,94	0,78	0,83	0,48	0,59	0,60	0,95	**0,53**	**0,77**	**0,79**	**0,88**
	Среднее	**0,56**	**0,69**	**0,74**	**0,83**	**0,62**	**0,86**	**0,76**	**0,84**	**0,57**	**0,81**	**0,84**	**0,87**	**0,45**	**0,77**	**0,82**	**0,81**	**0,52**	**0,71**	**0,69**	**0,93**	**0,54**	**0,77**	**0,77**	**0,86**

Анализ результатов показывает стабильное повышение уровня усвоения учебного материала по математике по новой технологии с использованием вычислительных экспериментов и 3-Д моделирования:

Критерии	1 год	После
Владение основами 3-Д моделирования	56%	83%
Умение описать алгоритм создаваемой модели	62%	84%
Владение навыками анализа и вычислительных экспериментов	57%	87%
Знание основных этапов вычислительного эксперимента	45%	81%
Умение применять результаты экспериментов в изучении теоретического материала и решении задач	52%	93%

Диаграмма «Влияние изменения уровня сформированности приемов вычислительных экспериментов и моделирования на усвоение учебного материала»:



Результаты подтверждают предложенную гипотезу и свидетельствуют о том, что эксперимент по формированию приемов вычислительных экспериментов у учащихся 10-11 классов положительно влияет на обучение математике в старшей школе.

<u>ФРАГМЕНТЫ УРОКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ</u>

<u>Пример 1.</u> Вычислительный эксперимент на этапе изучения новой темы.

Тема: «Свойство равнобедренного треугольника»

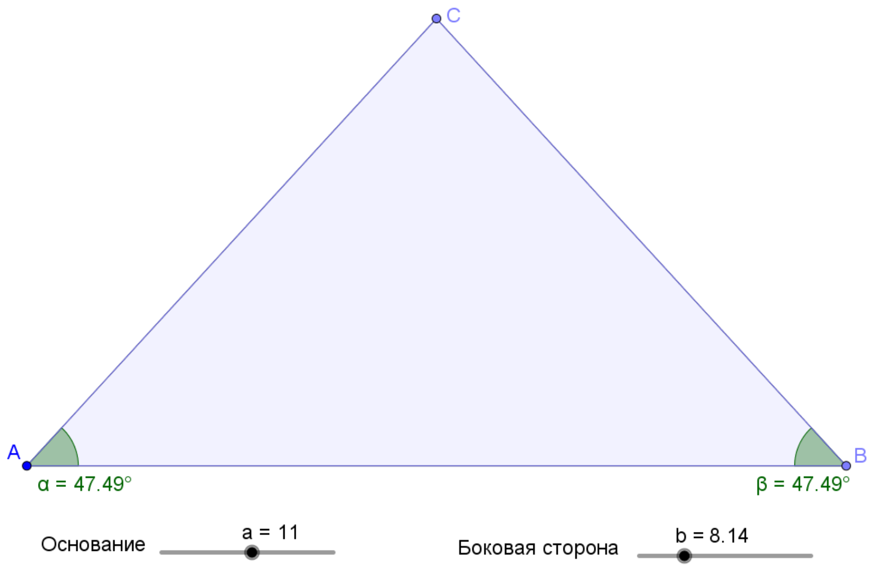
(урок первый в изучении темы).

Теорема: Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

<u>1. Постановка проблемы и ее анализ.</u> Для обнаружения факта равенства углов при основании равнобедренного треугольника использована задача на нахождение углов равнобедренного треугольника, если известен только один из них. Учащиеся могут подойти к открытию свойства в процессе решения сходных задач методом измерений.

<u>2. Построение математической модели.</u> Построить чертеж в программе GeoGebra:

- Для изменения длин основания и боковой стороны треугольника необходимо воспользоваться инструментом *Ползунок.*
- Основание и боковые стороны треугольника строятся с помощью инструмента *Отрезок с фиксированной длиной.*
- Определить положение точки С можно, применив инструменты *Середина объекта* и *Перпендикулярная прямая* к основанию треугольника.
- Величину угла можно измерить с помощью одноименного инструмента.



Построение равнобедренного треугольника в среде GeoGebra

3. Исследование математической модели. Выдвижение гипотезы.

Методом вычислительного эксперимента установить, какие из высказываний истинны:

- равенство углов при основании равнобедренного треугольника зависит / не зависит от выбора длины основания;
- равенство углов при основании равнобедренного треугольника зависит / не зависит от выбора длины боковой стороны;
- равенство углов при основании равнобедренного треугольника зависит / не зависит от соотношения длины основания к длине боковой стороны.

4. Разработка алгоритма решения проблемы.

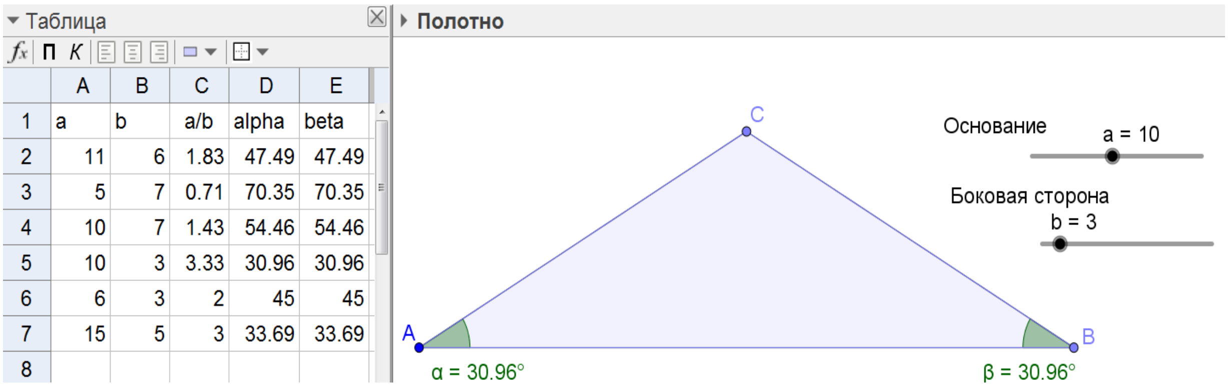
- Построить биссектрису СД угла С.
- Доказать, что треугольники АВД и АСД равны по двум сторонам и углу между ними.
- Используя свойство равных треугольников, сделать вывод о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника.

5. Визуализация математической модели средствами ИКТ.

Построить чертеж в среде GeoGebra.

6. Проведение расчетов.

Заполнение таблицы в среде GeoGebra (режим SpreadSheet).



Таблица

	A	B	C	D	E
1	a	b	a/b	alpha	beta
2	11	6	1.83	47.49	47.49
3	5	7	0.71	70.35	70.35
4	10	7	1.43	54.46	54.46
5	10	3	3.33	30.96	30.96
6	6	3	2	45	45
7	15	5	3	33.69	33.69
8					

7. Анализ полученных результатов.

В качестве метода для проверки гипотезы выступает модифицирующий эксперимент. Например, учащимся можно предложить задание: «Проверьте, выполняется ли утверждение, если треугольник является прямоугольным; тупоугольным».

Пример 2. Вычислительный эксперимент при решении задач.

Тема: «Решение задач с экономическим содержанием по материалам ЕГЭ» (урок четвертый в изучении темы).

Задача. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6902000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

1.Постановка проблемы и ее анализ.

Входные параметры: кредит S=6902000, коэффициент кредита b=1,125, x – ежегодный платеж в банк.

На выходе должны получить: 4x=Sb.

Формулирование гипотез, объясняющих поведение и развитие объекта:

база для начисления процентов ежегодно увеличивается на сумму, равную начисленным процентам, т.е. абсолютная сумма начисляемых процентов возрастает, и процесс увеличения суммы происходит с ускорением.

2. Построение математической модели.

31.12.2015 год: (Sb – X) – сумма долга после первой выплаты

31.12.2016 год: (Sb – X)b – X - сумма долга после второй выплаты

31.12.2017 год: $(S^2 - xb - x)b - x = Sb^3 - xb^2 - xb - x$ - сумма долга после третьей выплаты

31.12.2018 год: $(Sb^3 - xb^2 - xb - x)b - x = 0$ - сумма выплаты после четвертой выплаты

$$(Sb^3 - xb^2 - xb - x)b - x = 0$$

$$Sb^4 - xb^3 - xb^2 - xb - x = 0$$

$$Sb^4 = x(b^3 + b^2 + b + 1)$$

$$X = \frac{Sb^4}{b^3 + b^2 + b + 1}$$

3. Исследование модели.

В задаче дано значение каждой переменной, входящей в модель, решение существует.

4. Разработка алгоритма решения задачи.

Необходимо вычислить значение X по данным задачи.

5. Визуализация математической модели средствами ИКТ.

Численное решение задачи произведено в программе Excel:

$$X = \frac{6902000 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8}}{\frac{729}{512} + \frac{81}{64} + \frac{9}{8} + 1} = \frac{862750 \cdot 81 \cdot 81}{64 \cdot 8} : (\frac{1377}{512} + \frac{17}{8}) = \frac{350 \cdot 81 \cdot 81 \cdot 512}{512 \cdot 2465} 350 \cdot 81^2 = 2296350$$

6. Проведение расчетов.

Заполнение таблицы в программе Excel.

7. Анализ полученных результатов.

Множитель $(1+ 0{,}01b)^n$ называется факторным множителем, его смысл состоит в следующем: он показывает, чему будет равна одна денежная единица (один руб., один долл. и т.п.) через n периодов при заданной процентной ставке b.

Решая данную задачу, учащиеся получили модель начисления сложных процентов. На основе проведенных вычислительных экспериментов, делается вывод одна модель может быть использована в различных ситуациях. При решении других типов экономических задач (в рамках подготовки к ЕГЭ по математике) была выведена таблица формул для нахождения сложных процентов.

Таблица 3. Таблица формул для нахождения сложных процентов

№ модели	Название	Коэффициент	Область применения
Модель 1	Фактор накопления суммы денежной единицы, или будущая стоимость вложения, равного единице	$(1+E)^n$	Определение будущей стоимости денег при известной их текущей стоимости
Модель 2	Фактор накопления денежной единицы за период, или будущая стоимость единичного вложения за период	$\frac{(1+E)^n - 1}{E}$	Определение будущей стоимости аннуитетных (финансовых) серий платежей, осуществляемых в конце каждого момента времени в течение заданного периода
Модель 3	Фактор фонда возмещения	$\frac{E}{(1+E)^n - 1}$	Определение аннуитетных платежей, которые необходимы в конце каждого момента времени в течение заданного

			периода, чтобы к концу срока накопить определенную сумму средств
Модель 4	Фактор текущей стоимости денежной единицы	$\frac{1}{(1+E)^{n}}$	Показывает стоимость на данный момент той единицы, которая будет получена в будущем
Модель 5	Фактор текущей стоимости аннуитета, или текущая стоимость единичного вложения по периодам	$\frac{1-(1+E)^{-n}}{E}$	Определение текущей стоимости потока равных аннуитетных платежей, осуществляемых в конце каждого момента времени в течение заданного периода
Модель 6	Фактор накопления суммы денежной единицы, или будущая стоимость вложения, равного единице	$\frac{E}{1-\frac{1}{(1+E)^{n}}}$	Определение аннуитетных платежей, необходимых для того, чтобы к концу заданного срока кредит был полностью погашен

Знание и использование шести функций сложного процента упрощает процесс построения математической модели исследуемого процесса. В первых трех моделях использована концепция наращивания (принцип, используемый для расчета процентных доходов или расходов по уплате процентов, остатков на банковских счетах, основных платежей по займу и т.д.). При наращивании процент уплачивается с суммы накопленных платежей по основному капиталу и процентам.

В трех остальных моделях используется концепция дисконтирования (процедура, определяющая аналог дохода, который может быть выплачен через определенный период при существующей норме процента), обратная концепции наращивания. Дисконтирование означает сокращение величины будущего дохода в целом или серии поступлений денежных средств до уровня их текущей стоимости. Ключевым параметром каждой модели является эффективная годовая процентная ставка (процент, начисляемый за год лишь один раз и дающий тот же результат, что и сложные проценты с начислением m раз в году) $E = 0{,}01p_e$. Зная эти шесть основных типов моделей, ученик должен лишь правильно определить, какая из функций должна быть использована в той или иной задаче, и далее провести расчеты и интерпретировать, полученные результаты.

Пример 3. Вычислительный эксперимент в задачах на построение.

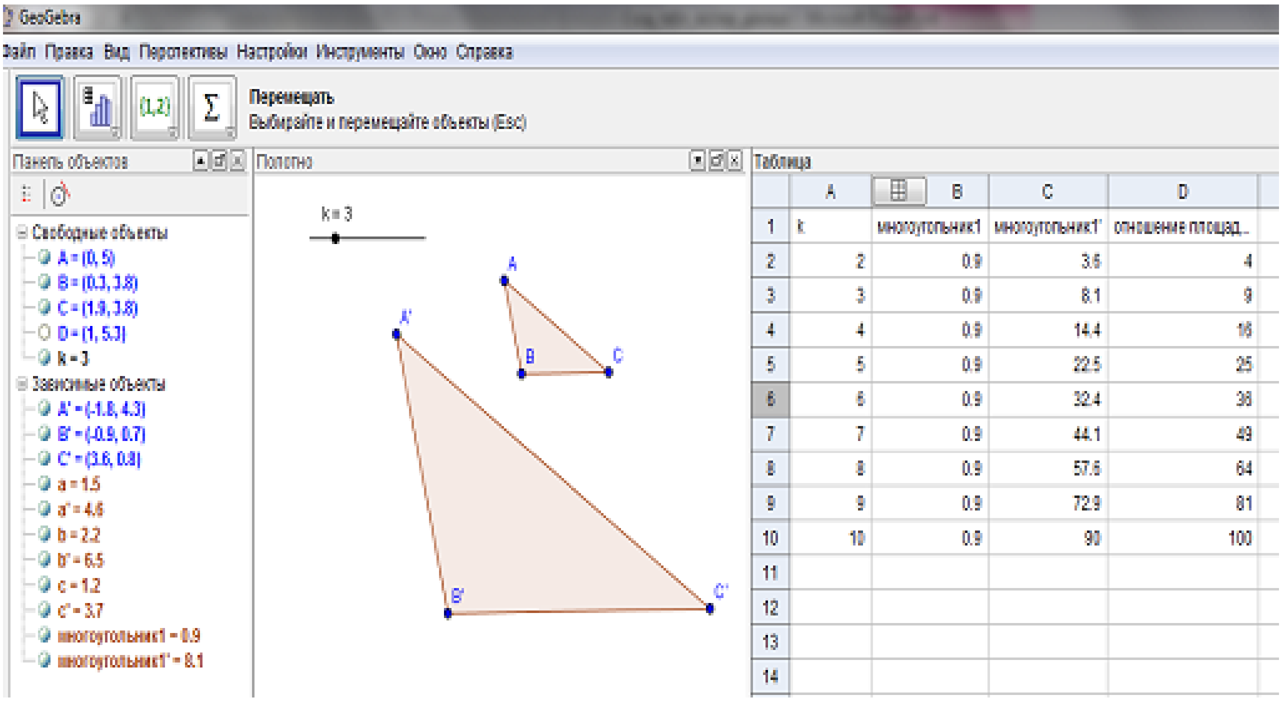
Тема: «Признаки подобия треугольников»
(урок пятый в изучении темы).

Задача. Установить зависимость между значением отношения площадей двух подобных треугольников и коэффициентом подобия. Определить формулу, выражающую эту зависимость, подтвердить правильность формулы вычислительным экспериментом, дать логическое объяснение.

1. Формулировка проблемы и ее анализ.

Рассмотрение различных числовых значений коэффициента подобия и установление зависимости может быть установлено в результате проведения вычислительного эксперимента в программе GeoGebra. Для простоты выдвижения гипотезы учащимся даются лишь целочисленные значения коэффициента подобия.

2. Построение математической модели в программе GeoGebra.



	A	B	C	D
1	k	многоугольник1	многоугольник1'	отношение площад...
2	2	0.9	3.6	4
3	3	0.9	8.1	9
4	4	0.9	14.4	16
5	5	0.9	22.5	25
6	6	0.9	32.4	36
7	7	0.9	44.1	49
8	8	0.9	57.6	64
9	9	0.9	72.9	81
10	10	0.9	90	100
11				
12				
13				
14				

3. Исследование модели.

На этом этапе формулируется утверждение о существовании зависимости и предлагается формула, выражающая эту зависимость на основе собранных данных. Также необходимо сформировать альтернативные гипотезы, которые должны быть отвергнуты на этапе вычислительного эксперимента. Для облегчения получения таких утверждений можно разделить учащихся на «исследователей» и «оппонентов». При этом задача «оппонентов» - сформулировать как можно больше альтернатив утверждению, высказанному «исследователями», например, что данное соотношение справедливо только для целочисленных значений коэффициента подобия, или что можно подобрать такие значения сторон, треугольника ABC, при которых соотношение площадей будет другим.

4. Разработка алгоритма решения задачи.

Опровержение альтернативных гипотез и подтверждение истинности сформулированного утверждения с помощью трех методов обоснования согласно субъектного опыта учащихся:

-проверка методом вычислительного эксперимента;

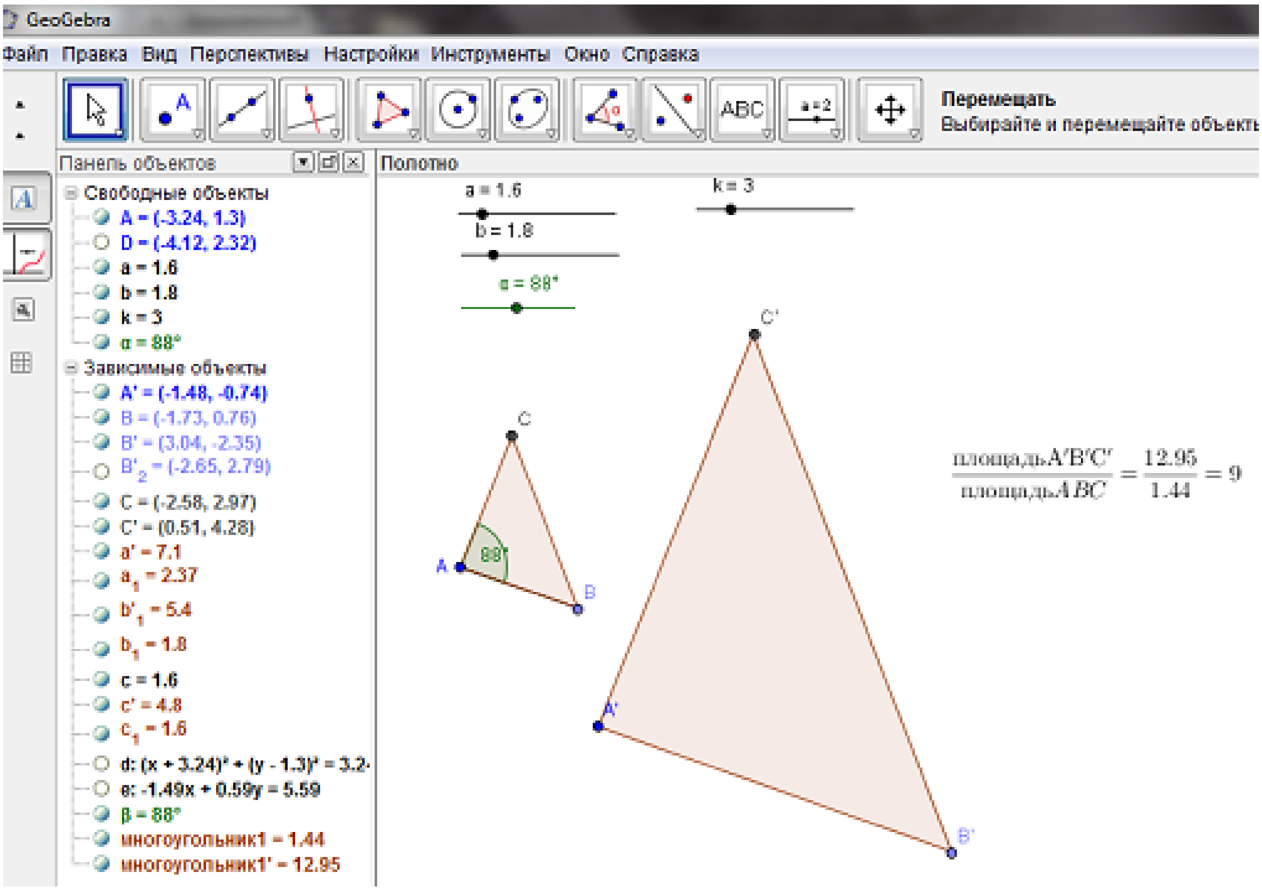
- обоснование корректности динамического чертежа;

- логическое объяснение полученной зависимости.

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}a'b'\sin\gamma}{\frac{1}{2}ab\sin\gamma} = \frac{\frac{1}{2}(ka)(kb)\sin\gamma}{\frac{1}{2}ab\sin\gamma} = k^2.$$

Этот этап требует включения нового утверждения в систему ранее известных утверждений о подобии треугольников, т.е. оценке его теоретической значимости. При этом выделяется теоретическая база доказательства теоремы, оценивается возможность получения его логических следствий и обобщений (например, на случай произвольного многоугольника).

5. Визуализация математической модели средствами ИКТ.



6. Проведение расчетов.

На данном этапе оценивается практическая значимость полученной формулы, т.е. расширения возможности учащихся в решении вычислительных задач (например, найти площадь треугольника ABC, если площадь подобного ему треугольника $A_1 B_1 C_1 = 10$ см^2, а коэффициент подобия k=5).

7. Анализ полученных результатов.

В качестве метода для проверки гипотезы выступает модифицирующий эксперимент. Например, учащимся можно предложить задание: «Проверьте, выполняется ли утверждение, если треугольник является прямоугольным (тупоугольным) данное утверждение справедливо».

Пример 4. Вычислительный эксперимент в учебно-исследовательской работе.

Тема учебно-исследовательской работы «Методы решения транспортной задачи» (ученица 10 кл. К. Елизавета)

Транспортная задача (задача Монжа — Канторовича) — математическая задача линейного программирования специального вида о поиске оптимального распределения однородных объектов из аккумулятора к приемникам с минимизацией затрат на перемещение. Классическая транспортная задача — это задача об оптимальном плане перевозок однородного продукта из однородных пунктов наличия в однородные пункты потребления на однородных транспортных средствах (предопределённом количестве) со статичными данными (это основные условия задачи).

<u>*Задача.*</u> *(В общем виде)* Некоторый однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах $a_1, a_{2,}, ..., a_m$. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах $b_{1,}, b_2, ..., b_n$. Известны c_{IJ} (i=1,2,…,m, j=1,2,…,n) - стоимости перевозки единицы груза от каждого I-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

<u>*1. Формулировка проблемы и ее анализ.*</u>

Исходные данные транспортной задачи обычно записываются в таблице. Исходные данные задачи могут быть представлены также в виде вектора запасов поставщиков A=($a_1, a_{2,}, ..., a_m$), вектора запросов потребителей B=($b_{1,}, b_2, ..., b_n$) и матрицы стоимостей C:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

В транспортных задачах под поставщиками и потребителями понимаются промышленные и сельхозпредприятия, заводы, фабрики, склады, магазины и т.д. Однородными считают грузы, которые могут быть перевезены одним видом транспорта. Под стоимостью перевозок понимаются тарифы, расстояния, время, расход топлива и т.п.

2. Построение математической модели.

Переменными транспортной задачи являются x_{ij} (i=1,2,…,m, j=1,2,…,n) – объемы перевозок от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Эти переменные можно записать в виде матрицы перевозок

$$X = \begin{Bmatrix} x_{11} & x_{22} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{Bmatrix} .$$

Так как произведение $c_{ij}\ x_{il}$ определяет затраты на перевозку груза от i-го поставщика j-му потребителю, то суммарные затраты на перевозку всех грузов равны $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{il} x_{ij}$.

По условию задачи требуется обеспечить минимум суммарных затрат. Следовательно, целевая функция (функция, связывающая цель с управляемыми переменными в задаче оптимизации) имеет вид $Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$.

Система ограничений задачи состоит из двух групп уравнений. Первая группа из m уравнений описывает тот факт, что запасы всех m поставщиков вывозятся полностью:

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, i=1,2,…,m.

Вторая группа из n уравнений выражает требование полностью удовлетворить запросы всех n потребителей: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, j=1, 2, … , n.

b1 / **a1**	b_1	b_2	**…**	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Учитывая условие неотрицательности объемов перевозок, математическую модель задачи можно записать так:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=1,2,\ldots,m, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=1, 2, \ldots, n, \qquad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i=1,2,,\ldots,m, \quad j=1,2,\ldots,n \qquad (4)$$

В рассмотренной модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Математическая формулировка транспортной задачи такова: найти переменные задачи $X = (x_{ij})$, i=1,2,,…,m, j=1,2,…,n, удовлетворяющие системе ограничений (2), (3), условиям неотрицательности (4) и обеспечивающие минимум целевой функции (1).

3. Исследование модели.

В зависимости от сбалансированности различают три типа транспортных задач:

- сбалансированная транспортная задача, в случае, если количество произведенной продукции равно суммарной потребности в ней;
- транспортная задача в условиях перепроизводства, в этом случае для сведения ее к сбалансированной транспортной задаче необходимо ввести фиктивный пункт потребления, стоимость перевозки единицы продукции в который можно взять равной нулю;
- транспортная задача в условиях дефицита, в этом случае для сведения ее к сбалансированной транспортной задаче необходимо ввести фиктивный пункт производства, стоимость перевозки с которого можно принять равной 0.

4. Разработка алгоритма решения задачи. (По имеющимся входным данным при условии сбалансированности)

В кондитерский концерн входят три фабрики и пять магазинов. Фабрики производят 250, 275 и 225 единиц продукции в неделю. Пяти магазинам требуется 100, 200, 50, 275 и 125 единиц продукции еженедельно. Стоимость перевозки единицы продукции с завода в магазин приведена в таблице.

	Магазины				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Фабрика 1	1.5	2	1.75	2.25	2.25
Фабрика 2	2.5	2	1.75	1	1.5
Фабрика 3	2	1.5	1.5	1.75	1.75

Необходимо составить план перевозок с целью минимизации суммарных транспортных расходов.

Рассмотрим математическую модель задачи. Пусть x_{ij} – неизвестный объем перевозок с i-й фабрики в j-й магазин. Необходимо минимизировать суммарные транспортные расходы $z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij}$, где cij – стоимость перевозки с i-й фабрики в j-й магазин. Неизвестные x_{ij} должны удовлетворять следующим ограничениям:

- объемы перевозок не могут быть отрицательными ($x_{ij} \ge 0$);
- вся продукция должна быть вывезена с заводов $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1..3$, где a_i – объем производства на i-м заводе;
- потребности всех магазинов должны быть полностью удовлетворены $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, j = 1..5$, где b_j – потребности j-го магазина.

Таким образом, получается следующая оптимизационная задача. Найти значения матрицы $X(x_{ij})$, при которых функция цели Z достигает своего минимального значения, и удовлетворяются отграничения, сформулированные выше.

5. Визуализация математической модели средствами ИКТ.

При решении транспортной задачи в САПР MathCAD с помощью решающего блока необходимо:

1. Определить матрицу C и вектора a и b.
2. Сформировать функцию цели Z.
3. Задать матрицу начального приближения X.
4. В решающем блоке ввести ограничения, для этого необходимо сформировать массивы, в которых хранятся $\sum_{i=1}^{3} x_{ij}$ и $\sum_{j=1}^{5} x_{ij}$.
5. Решить задачу оптимизации с помощью функции Mininize.

6. Проведение расчетов.

Согласно рассмотренному плану решения сформулируем необходимые структурные конструкции.

Матрица стоимостей перевозок C $\quad ORIGIN := 1$

$$C := \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 1.75 & 1.25 & 2.25 \\ 2.5 & 1.5 & 1.75 & 1 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 1.5 & 1.75 & 1.75 \end{pmatrix}$$

Массив потребностей по магазинам $b := \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \\ 275 \\ 125 \end{pmatrix}$

Массив производственных мощностей фабрик $a := \begin{pmatrix} 250 \\ 275 \\ 225 \end{pmatrix}$

Условие сбалансированной задачи

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 750 \qquad \sum_{j=1}^{5} b_j = 750$$

Начальное приближение

$$x_{3,5} := 0$$

Функции sum_rows(x) и sum_columns(x) формируют массивы, в которых храняться суммы по строкам $\sum_{j=1}^{5} x_{i,j}$ и столбцам $\sum_{i=1}^{3} x_{i,j}$ соответственно

```
sum_rows(x) := | for i ∈ 1..3
               |   | v_i ← 0
               |   | for j ∈ 1..5
               |   |   v_i ← v_i + x_i,j
               | v

sum_columns(x) := | for j ∈ 1..5
                  |   | v_j ← 0
                  |   | for i ∈ 1..3
                  |   |   v_j ← v_j + x_i,j
                  | v
```

$$Z(x) := \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} \left(C_{i,j} \cdot x_{i,j}\right)$$

Given

$x \geq 0 \qquad sum\_rows(x) = a \qquad sum\_columns(x) = b$

$x := Minimize(Z, x)$

$$x = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 125 & 125 \\ 0 & 175 & 50 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Z(x) = 1.025 \times 10^3$$

Решение транспортной сбалансированной задачи с помощью САПР MathCAD

7. Анализ полученных результатов.

Полученный ответ удовлетворяет условию задачи и показывает, что минимальные суммарные транспортные расходы будут при завозе в 1 магазин 100 ед. товара, в 4 магазин 150 ед. товара (из 1 фабрики); во 2 магазин 25 ед. товара, в 4 магазин 125 ед. товара, в 5 магазин 125 ед. товара (из 2 фабрики); во 2 магазин 175 ед. товара, в 3 магазин 50 ед. товара (из 3 фабрики). Стоимость перевозок при этом составила 1025 ден. ед.