Методическая разработка по теме
«Вычислительный эксперимент как инструмент обучения информатике на углубленном уровне в старшей профильной школе» (2023-2025 уч.г.)

Сведения об авторах:

Симаков Егор Евгеньевич, учитель информатики МАОУ Лицей №1 г.Южно-Сахалинска. Стаж работы 13 лет. Специальность – математик, системный программист; аспирантура 13.00.02 - Теория и методика обучения и воспитания. Контактный телефон 89147463137.

Симакова Марина Николаевна, учитель математики МАОУ Лицей №1 г.Южно-Сахалинска. Стаж работы 40 лет. Специальность – учитель математики и физики. Контактный телефон 89147463135.

Актуальность темы.

Возрастающая роль информационных технологий в современном обществе обуславливает необходимость подготовки школьников к решению сложных практических задач, требующих не только теоретических знаний, но и навыков исследовательской и проектной деятельности. В условиях профильного обучения информатике на углублённом уровне особое значение приобретает внедрение вычислительного эксперимента как эффективного инструмента формирования у старшеклассников аналитического мышления, умения моделировать и исследовать реальные процессы с помощью современных технологий.

Вопросами определения роли и места вычислительного эксперимента и моделирования в педагогике в нашей стране занимаются такие ученые, как А.С. Самарский, В.А. Далингер, В.Н. Дубровский, В.И. Рыжик, Т.Ф. Сергеева, М.В. Шабанова, Г.Б. Шабат, и др. Основным направлением их исследований является определение условий использования эксперимента на различных этапах изучения учебного материала с учетом закономерностей развития теоретического мышления. Еще одно направление педагогических исследований – организация учебно-исследовательской деятельности школьников с применением моделирования (Д.Б. Богоявленская, П.В. Середенко, В.А. Сластенин, А.В. Хуторский, А.И. Савенков, А.В. Леонтович).

Однако анализ научно-методической и психолого-педагогической литературы обнаруживает следующие **противоречия:**

- между необходимостью освоения в школе приемов программирования и вычислительных экспериментов и моделирования для осуществления связи содержания образования и методики обучения с практикой и отсутствием нужных методик;
- между высоким уровнем активности учащихся на этапе получения новых знаний методом вычислительного эксперимента и моделирования и их пассивностью при объяснении новой темы традиционными методами;
- между наличием экспериментальных данных о содержании субъектного (доучебного) опыта учащихся, связанного с оценкой истинности утверждений с использованием наблюдений и экспериментов, и методикой обучения, не учитывающей эти особенности содержания субъектного опыта.

На основе выявленных противоречий определена **тема разработки**: вычислительный эксперимент как инструмент обучения информатике на углубленном уровне в старшей профильной школе.

Теоретическое обоснование и основная педагогическая идея.

Педагогическая идея применения вычислительного эксперимента в информатике заключается в переходе от репродуктивного усвоения знаний к деятельностному, исследовательскому подходу, при котором ученик становится активным субъектом учебного процесса.

Вычислительный эксперимент позволяет моделировать и исследовать сложные процессы, которые невозможно или затруднительно воспроизвести в реальных условиях. В педагогическом плане это даёт следующие преимущества.

1. **Формирование исследовательских навыков.** Учащиеся учатся ставить гипотезы, планировать эксперимент, анализировать полученные данные и делать выводы, что развивает критическое и алгоритмическое мышление.
2. **Интеграция теории и практики.** Теоретические знания по информатике (алгоритмы, структуры данных, моделирование) сразу находят применение в практической деятельности, что повышает мотивацию и глубину понимания материала.
3. **Развитие самостоятельности и креативности.** Ученики получают возможность самостоятельно выбирать параметры эксперимента, изменять модели, искать нестандартные решения, что способствует развитию творческих способностей.
4. **Подготовка к современным профессиям.** Вычислительный эксперимент формирует у школьников компетенции, востребованные в IT, науке и инженерии: работа с большими данными, моделирование, программирование, анализ результатов.
5. **Визуализация абстрактных понятий.** С помощью вычислительного эксперимента сложные и абстрактные объекты информатики становятся наглядными, что облегчает их освоение.

Таким образом, внедрение вычислительного эксперимента в образовательный процесс позволяет сделать обучение информатике личностно-ориентированным, практико-ориентированным и исследовательским, формируя у школьников не только знания, но и умения применять их для решения реальных задач. Востребованность, практическая значимость и, вместе с тем, недостаточная разработанность данной темы определили **основную педагогическую идею:** внедрение вычислительных экспериментов моделирования на уроках информатики в 10-11 классах дает возможность теоретические сведения, изучаемые на уроках, подтверждать экспериментально, в практических исследованиях. Получаемые на уроках знания становятся не просто словами, но обретают форму, становятся осязаемыми.

Авторами разработана методика формирования умений, связанных с проведением вычислительных экспериментов при изучении информатики на углубленном уровне, учебные материалы для практической реализации этой методики и апробации в МАОУ Лицей №1 г. Южно-Сахалинска.

Цель предлагаемой методики: выявить теоретические и методические основы формирования умений, связанных с проведением вычислительных экспериментов при обучении информатике учащихся профильных классов средней школы с использованием моделирования.

Задачи:

1. Проанализировать психолого-педагогическую, методическую и специальную литературу и теоретически обосновать целесообразность внедрения вычислительных экспериментов в преподавание информатики в старшей профильной школе.
2. Уточнить содержание понятия «вычислительный эксперимент», проводимого с использованием 3D моделирования. Определить роль и место вычислительных экспериментов в обучении информатике.
3. Спроектировать и обосновать модель формирования умений, связанных с проведением вычислительных экспериментов при обучении информатике, которая обеспечит интеграцию содержания субъектного опыта учащихся с опытом аргументации утверждений в любой области знаний.
4. Разработать педагогические условия практической реализации модели поэтапного формирования умений, связанных с проведением вычислительных экспериментов при обучении информатике.
5. Экспериментально проверить эффективность методики обучения приемам вычислительных экспериментов при изучении информатике с использованием 3D моделирования.

Для решения поставленных задач использованы **методы исследования:**

1. Теоретические: анализ, синтез и обобщение методологической, психолого-педагогической, методической и специальной литературы по проблеме исследования; изучение нормативной и программно-методической документации об общем образовании; проектирование модели подготовки учащихся в области информатики с применением вычислительных экспериментов и моделирования.
2. Эмпирические: педагогическое наблюдение, анкетирование, тестирование, поэлементный и компонентный анализ ответов, экспертная оценка результатов деятельности по формированию приемов вычислительных экспериментов, педагогический эксперимент.
3. Математические: статистическая обработка данных эксперимента, графические и табличные интерпретации данных.

Для сбора и анализа эмпирической информации применялись **частные психодиагностические методики:**

1. Анализ результатов деятельности ученика (К. Ингенкамп).
2. Определение готовности к обучению исследовательским навыкам и к исследовательской деятельности (П.В. Середенко; И.Ю. Гутник).
3. Определение уровня готовности к обучению с применением метапредметного подхода (трехуровневая диагностика Е.С. Аскомовец, А.М. Митина).
4. Определение уровней творческого мышления (И.С. Аверина) и логического мышления (Д. Равен).
5. Обработка результатов педагогического исследования (Н.В. Бордовская).
6. Применение методов математической статистики, включая сравнение между собой средних выборочных величин (t-критерий Стьюдента).
7. Диагностика уровня знаний, умений и навыков (критерий Вилкоксона).
8. Мониторинг успеваемости (В.В. Гузеев).

9. Анализ результатов методом сводных показателей по разработанным критериям (Н.В. Хованов).

Контрольно-диагностические методы позволили по результатам анкетирований и тестирований составить итоговые таблицы в программе Statistical Package for the Social Sciences (SPSS, статистический пакет для социальных наук) и сделать вывод об эффективности применения разработанной системы формирования приемов вычислительных экспериментов в педагогическом процессе.

Научная новизна методики заключается в разработке и обосновании системного подхода, который интегрирует вычислительный эксперимент не просто как дополнительный инструмент, а как ведущий компонент образовательного процесса на углублённом уровне. В отличие от традиционного использования компьютерных программ для демонстрации или отработки навыков, новизна проявляется в следующих аспектах.

1. **Разработка целостной педагогической системы.** Создаётся не набор разрозненных заданий, а единая методика, охватывающая все этапы: от постановки учебной проблемы и построения математической или алгоритмической модели до проведения виртуального эксперимента, анализа данных и интерпретации результатов в контексте реальной задачи.
2. **Спецификация дидактических функций.** Четкое определение и классификация дидактических функций вычислительного эксперимента, адаптированных для курса информатики. Например, выделяются его возможности для исследования свойств алгоритмов и структур данных; моделирования сложных систем (физических, социальных, экономических) с помощью программных средств; визуализации и анализа больших объёмов информации.
3. **Интеграция с исследовательской и проектной деятельностью.** Методика систематизирует включение вычислительного эксперимента в структуру индивидуальных и групповых исследовательских проектов

школьников, что позволяет формировать у них компетенции, соответствующие современным требованиям к IT-специалистам.

4. **Создание банка методических разработок.** Разработка и апробация комплекса типовых учебных моделей и сценариев вычислительных экспериментов, которые могут быть непосредственно встроены в образовательную программу и использованы учителем без глубокой дополнительной подготовки.

Таким образом, научная новизна заключается в переходе от эпизодического использования компьютера к построению методической системы, где вычислительный эксперимент становится основным средством познания и развития ключевых компетенций учащихся в области информатики.

Теоретическая значимость методики заключается в обогащении дидактики и теории обучения информатике новыми научными положениями, которые расширяют представления о содержании, методах и средствах профильного обучения. Вклад данной методики в педагогическую теорию проявляется в следующем.

1. **Обоснование нового типа учебного исследования.** Методика теоретически доказывает, что вычислительный эксперимент является не просто упражнением, а самостоятельным видом учебной деятельности, который находится на стыке теоретического познания и реального эксперимента. Это позволяет по-новому взглянуть на структуру познавательного процесса в информатике.
2. **Развитие теории содержания образования.** Применение методики позволяет теоретически обосновать включение в школьный курс информатики элементов компьютерного моделирования, анализа данных и исследования алгоритмов как обязательных компонентов, формирующих системное научное мировоззрение современного школьника.
3. **Систематизация дидактических возможностей.** Методика создаёт теоретическую базу для классификации и систематизации дидактических

функций вычислительного эксперимента. Это позволяет точно определить, какие именно образовательные, развивающие и воспитательные задачи можно эффективно решать с его помощью.

4. **Формирование методологической основы для интеграции дисциплин.** Создание фундамента для межпредметной интеграции информатики с физикой, математикой, биологией и другими науками. Вычислительный эксперимент обосновывается как универсальный инструмент познания, применимый в различных предметных областях.
5. **Развитие теории деятельностного подхода.** Методика вносит вклад в развитие деятельностного подхода в педагогике, конкретизируя его для курса информатики. Она теоретически описывает, как через организацию вычислительного эксперимента можно формировать у учащихся универсальные учебные действия (УУД): познавательные, регулятивные и коммуникативные.

Таким образом, теоретическая значимость заключается в том, что методика не просто предлагает набор приёмов, а формирует новое научное знание о закономерностях обучения информатике в условиях цифровизации образования, обогащая общую теорию и методику обучения.

Практическая значимость методики заключается в создании готового к использованию инструментария для учителей и учеников, который позволяет повысить эффективность и качество образовательного процесса на углублённом уровне. Эта значимость проявляется в конкретных, измеримых результатах и продуктах, которые могут быть внедрены в школьную практику.

1. **Повышение качества образования и подготовки к экзаменам.** Методика обеспечивает целенаправленную подготовку учащихся к ЕГЭ и олимпиадам по информатике. Решение задач, требующих анализа алгоритмов, моделирования процессов и работы с данными, становится более осознанным и результативным.

2. **Создание методического обеспечения для учителя.** Практическим результатом является разработка и апробация комплекса учебно-методических материалов, который включает:
   - сценарии уроков и практических работ, построенных на основе вычислительного эксперимента;
   - банк учебных моделей и проектов по различным темам (например, моделирование физических процессов, анализ социальных сетей, исследование эффективности алгоритмов сортировки);
   - методические рекомендации по организации исследовательской и проектной деятельности школьников.
3. **Развитие у учащихся востребованных навыков.** Методика позволяет формировать у старшеклассников практико-ориентированные компетенции, необходимые для дальнейшего обучения в вузах по IT-направлениям и для будущей профессии: навыки программирования и отладки кода; умение работать с данными, проводить их анализ и визуализацию; способность ставить гипотезы и проверять их с помощью компьютерного моделирования.
4. **Стимулирование проектной и исследовательской деятельности.** Методика предоставляет учителям готовый алгоритм для организации индивидуальных и групповых проектов, что делает учебный процесс более интересным, мотивирующим и соответствующим современным образовательным стандартам.
5. **Универсальность и доступность.** Разработанные модели и методики могут быть реализованы с использованием бесплатного и кроссплатформенного программного обеспечения (например, Python с библиотеками NumPy, Matplotlib, SciPy), что делает их доступными для любой школы независимо от уровня её материально-технического оснащения.

Таким образом, практическая значимость заключается в том, что методика предлагает не абстрактную идею, а конкретный, воспроизводимый и эффективный инструмент для решения реальных педагогических задач: повышения мотивации учеников, углубления их знаний и подготовки к вызовам современного технологического мира.

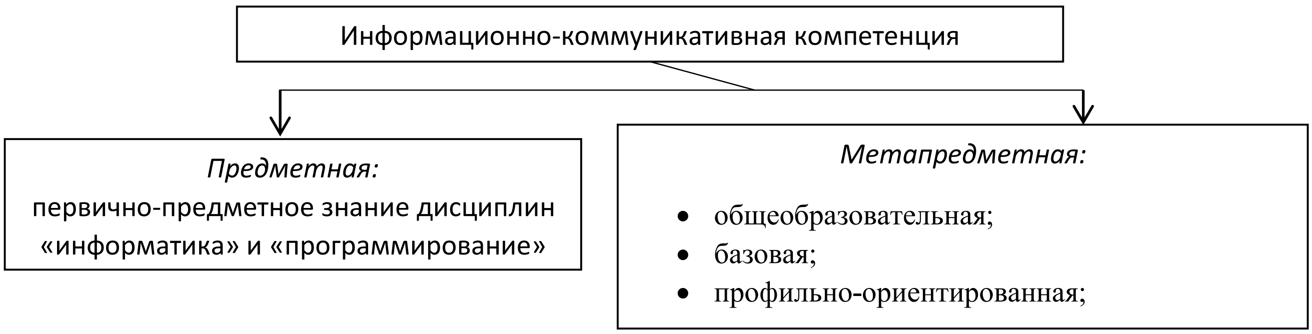
Достоверность и обоснованность полученных результатов определяются методологическим, общенаучным и методическим обеспечением процесса исследования; методической целостностью экспериментальной работы; применением комплекса методов, адекватных целям и задачам исследования; сочетанием теоретических и эмпирических методов исследования, качественными и количественными показателями результативности технологии обучения информатике, математике и физике на основе метапредметного подхода; достаточной репрезентативной выборкой.

Суть вычислительного эксперимента состоит в том, что по одним параметрам математической модели объекта (процесса) вычисляются другие её параметры и на этой основе делаются выводы о свойствах объекта (процесса). На схеме представлен технический цикл вычислительного эксперимента:

Эксперимент начинается с формулировки проблемы и изложения целей (этап I). Принятие гипотез исследования - этап II. При построении имитационной модели системы (этап III) возникает несколько проблемных вопросов: уровень сложности математической модели; продолжительность программирования; адекватность модели, отличающая эксперимент от упражнения. Этап IV - разработка программного обеспечения эксперимента. Программное обеспечение базируется на комплексах и пакетах прикладных программ, включающих в себя библиотеки программных модулей. Комплекс программ предназначен для решения близких по своей природе задач из одной предметной области. Пакеты прикладных программ, рассматриваемые как технология решения задач в рамках вычислительного эксперимента, позволяют наиболее эффективно использовать накопленный программный продукт. На этапе V идет планирование эксперимента для сокращения числа вычислительных прогонов, их продолжительности, количества наблюдаемых переменных, шагов изменения параметров и т.д. Выработка решений по управлению экспериментом (этап VI) основана на оценке гипотезы о поведении исследуемой системы, отладке имитационной модели и построении алгоритма организации эксперимента. Имитационный эксперимент (этап VII) — это проведение серии расчетов по разработанному алгоритму. В результате образуются ряды статистических данных (выборки). К основным методам обработки данных относятся методы математической статистики: дисперсионный анализ, спектральный анализ и эвристические процедуры. Затем результаты представляют в компактной форме, выдают рекомендации и делают заключение (этапы VIII и IX).

Для проведения вычислительных экспериментов в лицее используется компьютерный класс, в состав которого входят 18 ученических компьютеров и компьютер преподавателя, объединенных в локальную сеть. По сети учитель дает задания каждому учащемуся, затем все участники эксперимента обмениваются идеями, проводят расчеты и анализируют их с помощью теоретических сведений. Полученные данные поступают на компьютер преподавателя. Затем идет обработка полученных результатов. Имеющиеся в кабинете интерактивная панель, видеокамера и документ-камера позволяют наглядно представить опытные данные. Результаты работы учащиеся оформляют в виде рефератов и проектно-исследовательских работ, которые представляют на конференциях.

Одной из форм организации процесса формирования приемов вычислительных экспериментов является исследовательская работа: лабораторно-практические работы, практикумы и опыты, семинары. Дидактические цели таких занятий – экспериментальное подтверждение теоретических положений, изученных на уроках; овладение техникой эксперимента, умением решать практические задачи путем постановки опытов. Наиболее высоким уровнем формирования приемов вычислительных экспериментов является приобретенная учащимися метапредметная форма стойкой информационно-коммуникативной компетенции. Как видно из схемы, в этой компетенции выделяют две составляющие:



Предметная составляющая ориентирована на изучение информатики как науки и области практической деятельности. Метапредметная включает несколько компетенций. Первые две из них формируются в ходе изучения базового курса информатики. Третья и четвертая возникают в процессе углубленного изучения информатики и учебно-исследовательской работы в области приложений ИКТ и программирования.

На уроках широко используются программы LibreOffice Calc (MS Excel), GeoGebra, LibreOffice Writer (редактор формул), среды программирования Python IDLE / PyCharm (язык программирования Python и библиотеки для визуализации и инженерных расчетов). Изучается система автоматизированного проектирования (САПР) MathCAD и САПР Компас 3D. Самостоятельная разработка учащимися алгоритмов моделирования требует затрат времени и выходит за рамки урока. Этим обусловлено введение в образовательный процесс элективных курсов и спецкурсов. Учебно-исследовательская деятельность – это совокупность элементов, связей и отношений в конкретной научной области, направленных на решение актуальной проблемы. В отличие от научного, учебное исследование характеризуется созданием особых условий, при которых учащиеся исследуют уже известные объекты, свойства и явления окружающей действительности. За основу авторской методики обучения исследовательским умениям и навыкам вычислительных экспериментов принята система развивающего обучения. Цель обучения – готовность к саморазвитию, а основной метод обучения - деятельностный метод. Для развития исследовательских способностей учащихся в ходе специальных тренинговых занятий составлена программа, в которой учебный материал структурирован по принципу концентрических кругов: изучение языка программирования Python и компьютерных программ LibreOffice Impress (MS PowerPoint), NoteBook, LibreOffice Calc (MS Excel), GeoGebra, MathCAD, Компас 3D, RealFlow и др.; изучение основных тем информатики, математики и физики с использованием средств ИКТ; знакомство с метапредметным подходом к изучению математических понятий; изучение основ 3D моделирования. В программу включены четыре более мелкие подпрограммы, являющиеся автономными. Подпрограммы изучаются последовательно. Содержание подпрограмм постепенно усложняется и расширяется.

Для определения эффективности предложенной методики была разработана **система диагностических процедур** по отслеживанию процесса формирования приемов вычислительных экспериментов и моделирования в старшей профильной школе.

Цели предлагаемой диагностики:

1. Оптимизировать процесс индивидуального обучения.
2. Определить результаты деятельности ученика по овладению приемами вычислительных экспериментов и качество образования.

3. Свести к минимуму ошибки, допускаемые в процессе обучения.

Виды применяемой устной диагностики: опрос, сообщение, зачет, защита проекта. Виды письменной диагностики: реферат, контрольная работа, отчет о проведенной лабораторной работе, о вычислительном эксперименте, о практической работе. Виды графической диагностики: компьютерные презентации, программы для изучения отдельных тем информатики, математики и физики, анализ результатов проведенных экспериментов с помощью компьютерных программ. Виды рейтинговой диагностики: по методам исследовательской работы и алгоритмам проведенных исследований. Психологическая диагностика: тестирование и наблюдение.

Система диагностики оценивает степень овладения научно-теоретическими знаниями (теоретический компонент); приемами практической учебной исследовательской деятельности с применением программирования и вычислительных экспериментов (практический компонент); степень психологической готовности учащихся (психологический компонент). Затем каждому ученику выводится общая оценка по итогам трех составляющих. Анализ литературы дал возможность разработать критерии для определения уровней готовности учащихся к изучению учебного материала по математике и физике с применением метапредметного подхода. Для характеристики уровней готовности использована методика Л.М. Митиной и Е.С. Асмаковец. Уровней готовности в ней выделено три: минимальный, оптимальный, повышенный.

Весь диагностический инструментарий состоит из семи разделов:

1. Диагностика теоретической готовности. В тесте 20 заданий разного уровня. Наибольшее количество баллов – 38, наименьшее – 0.
2. Диагностика уровня развития исследовательских умений и навыков. В разделе содержится 30 заданий. Максимальное количество баллов – 64, минимальное – 0.
3. Диагностика поисковой активности (по трем уровням): 1 балл, 2 балла, 3 балла.

4. Диагностика творческого мышления. Всего предложено 45 заданий. Наибольшее количество баллов – 96, наименьшее – 28.
5. Диагностика логического мышления. Из 20 логических задач наибольшее возможное количество баллов – 60, наименьшее – 10.
6. Диагностика психологической готовности. Включено 20 заданий. Максимальное количество баллов – 64, минимальное – 20.
7. Диагностика поведения учащихся в исследовательском обучении (по трем уровням): 1балл, 2 балла, 3 балла.

Каждый из семи разделов может быть выполнен на низком, среднем или высоком уровне. Для удобства обработки большого количества данных выводится средний показатель готовности учащихся к проведению вычислительных экспериментов, усвоению приемов программирования и занятию исследовательской работой. Для этого используется алгоритм:

- Вычислить наибольшее S_{max} и наименьшее S_{min} значение сумм баллов по каждому из разделов.
- Распределить полученные суммы по трем уровням готовности: присваивают коэффициент 0,45 верхней границе низкого уровня U_1 и коэффициент 0,75 верхней границе среднего уровня U_2. Для определения границ используются формулы: $S_{min} + (S_{max} - S_{min}) * 0,45 = U_1$; $S_{min} + (S_{max} - S_{min}) * 0,75 = U_2$. Значения показателей уровней будут описаны неравенствами: низкий уровень $< U_1$; $U_1 <$ средний уровень $< U_2$; $U_2 <$ высокий уровень.

Например, диагностика уровня развития исследовательских умений и навыков. В разделе 30 заданий. S_{max}=64, S_{min}=0. Считаем по формулам U1 и U2. Получим, что промежуток значений, не больших 29 баллов, относится к минимальному уровню, от 30 до 48 баллов – к среднему уровню, свыше 48 баллов – к высокому уровню готовности. Рассчитав показатели по каждому разделу, можно вычислить оценку готовности учащихся к проведению вычислительных экспериментов, усвоению приемов программирования и занятию исследовательской работой в целом. При этом низкий уровень равен условному коэффициенту 1; средний уровень – 2; высокий уровень - 3. Тогда минимальная сумма средних показателей равна 7, а максимальная – 21. По формулам для определения U_1 и U_2: низкий (минимальный) уровень – не больше 13; средний (общий) уровень – от 14 до 18; высокий (продвинутый) уровень – не менее 19. Средние показатели отдельных компонентов готовности по разделам:

Раздел	Сумма баллов		Уровень			Кол-во заданий
	мини-мальный	макси-мальный	низкий	средний	высокий	
1). научно-теоретические знания	0	38	не больше 17	от 18 до 29	больше 29	20
2). исследовательские умения	0	64	не больше 29	от 30 до 48	больше 48	30
3). поисковая активность	индивидуальный показатель в одном из уровней		мини-мальный 1 балл	оптималь-ный 2 балла	повышен-ный 3 балла	
4). творческое мышление	28	96	не больше 59	от 60 до 79	больше 79	45
5). логическое мышление	10	60	не больше 33	от 34 до 48	больше 49	20
6). психологическая готовность	20	64	не больше 40	от 41 до 53	больше 53	20
7). поведение учащихся в исследовательском обучении	индивидуальный показатель в одном из уровней		мини-мальный 1 балл	оптималь-ный 2 балла	повышен-ный 3 балла	

Согласно разработанной технологии составляются индивидуальные карты достижений учащихся. В них каждому ученику по общему количеству набранных баллов определен уровень усвоения материала по темам. Например,

ФАМИЛИЯ, ИМЯ учащегося *Иванова Полина*	Название темы *Системы счисления*
Название раздела	Кол-во баллов
Теоретические знания	19
Практические умения	28
Психологическая готовность	2
общее кол-во баллов	49

По индивидуальным картам составляется сводная таблица результатов всего класса по учебным предметам (с указанием баллов по основным темам):

№	ФИ учащихся	Кол-во баллов
1.	*Иванова Полина*	49
2.		
3.		
...		

Анализ результатов диагностик показывает, что обучение информатике через систему интегрированных уроков, спецкурсов и исследовательскую работу с вычислительными экспериментами и 3D моделирование дает положительный результат и развивает творческие способности учащихся.

Для оценки качества обучения вычислительным экспериментам при дифференциации учащихся по начальным уровням знаний, способностям, возможностям и интересам определяющими являются положения:

- учет уровней до начала обучения и по окончании каждого учебного года;
- определение вопросов (заданий), которые оценивают каждый уровень;
- "качество" ответа на вопрос выбирается из трех значений (0 - не решено; 1 - решено не полностью; 2 - решено полностью).

Результаты диагностирования уровня сформированности приемов вычислительных экспериментов у учащихся отражены в таблицах.

Результаты входной работы (10 класс):

№	Ф.И.О.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	К. Мария	2	2	2	2	2	2	1	2	1	2	1	1	1	1	2
2	К. Никита	2	2	1	1	1	0	2	1	0	1	1	2	1	1	1
3	П. Александр	1	1	2	2	0	1	1	2	1	0	0	2	1	1	2
4	П. Ярослав	1	2	1	1	2	2	2	1	1	1	1	2	2	0	1
5	П. Игорь	2	2	1	2	2	1	2	1	0	2	1	1	2	1	1
6	П. Артем	2	2	1	1	2	1	1	2	1	2	0	1	1	2	1
7	Р. Диана	1	1	2	1	0	1	2	2	2	1	1	0	2	1	0
8	Р. Даниил	1	1	1	1	0	0	2	2	1	0	1	0	2	1	0
9	С. Никита	2	1	1	2	1	0	0	1	2	0	1	1	0	1	0
10	С. Захар	2	2	1	1	1	1	0	1	1	1	2	1	1	0	1
11	С. Егор	1	1	1	2	2	1	0	0	1	2	1	1	0	1	0
12	Ф. Роман	2	2	2	2	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	2
13	Ш. Андрей	2	2	1	1	2	2	2	1	1	1	2	1	1	2	2
14	Ш. Владислав	2	2	2	1	1	2	1	0	1	1	2	1	1	2	1
15	Ш. Андрей	2	1	1	2	1	0	1	2	2	1	2	2	1	1	1
16	Я. Анна	2	2	1	1	1	2	0	1	2	2	1	2	2	1	1

Результаты итоговой работы (10 класс):

№	Ф.И.О.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	К. Мария	2	2	2	2	2	2	1	2	1	2	1	2	2	2	1	2	2	2	1	1
2	К. Никита	2	2	1	1	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	1	1	2	1
3	П. Александр	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0
4	П. Ярослав	1	2	2	2	1	1	2	0	1	2	2	2	2	1	1	1	2	1	1	1
5	П. Игорь	2	2	2	2	2	1	2	1	1	2	1	1	2	2	2	1	2	1	1	1
6	П. Артем	1	2	1	2	2	1	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	1	1	2
7	Р. Диана	2	2	2	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1	0	0
8	Р. Даниил	2	2	1	1	0	1	2	2	1	0	2	1	2	1	1	1	0	1	1	0
9	С. Никита	2	2	2	2	1	1	0	1	2	1	1	1	0	1	1	1	2	0	1	0

10	С. Захар	2	2	1	0	1	2	1	1	2	1	2	1	1	1	1	0	2	0	1	2
11	С. Егор	2	1	1	2	1	1	1	0	2	1	2	1	0	1	1	0	1	1	0	1
12	Ф. Роман	2	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	1	1	2	2	1	2	1	1
13	Ш. Андрей	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	2	2	2	1	1	2
14	Ш. Владислав	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	2	1	1	2	2	2	1	1	1	2
15	Ш. Андрей	1	1	1	2	1	1	1	2	2	1	2	2	2	1	2	1	2	2	1	1
16	Я. Анна	2	2	1	2	1	2	1	1	2	2	1	2	2	1	2	1	1	1	1	1

Результаты итоговой работы (11 класс):

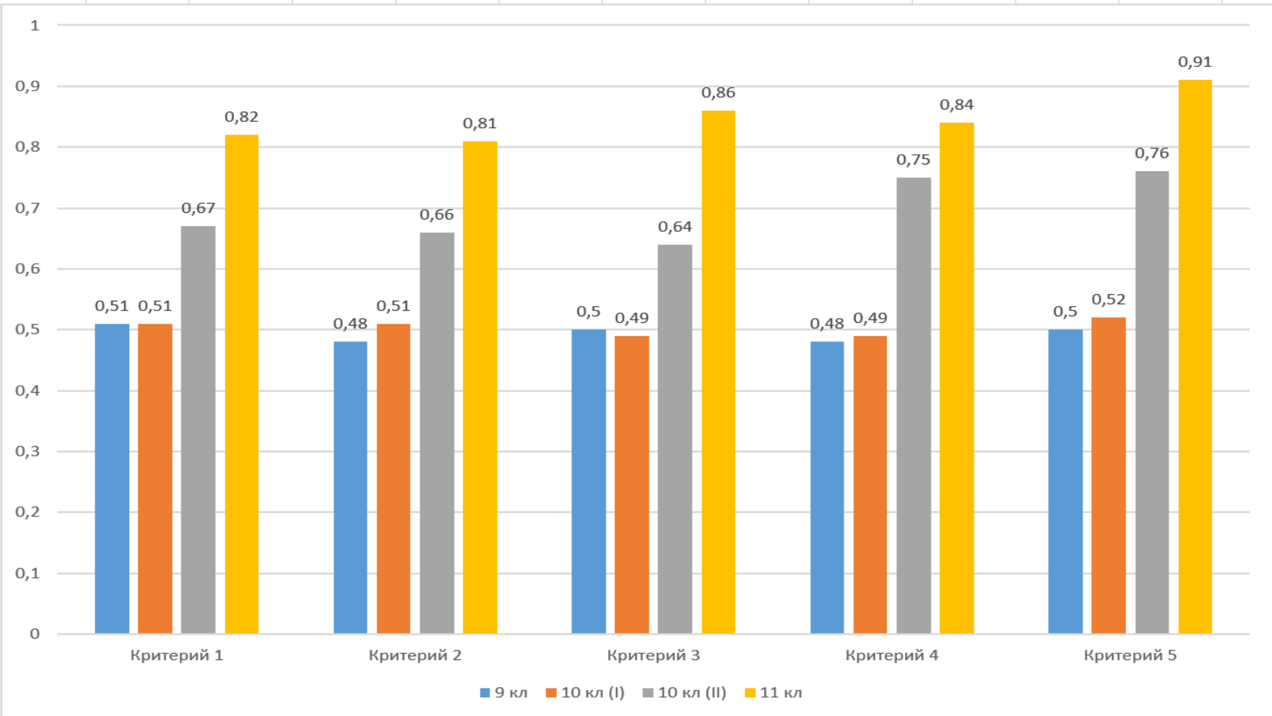
№	Ф.И.О.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	К. Мария	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	2
2	К. Никита	2	2	1	2	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	2
3	П. Александр	2	2	1	2	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	2
4	П. Ярослав	1	2	2	2	1	1	2	1	2	2	2	2	2	1	2
5	П. Игорь	2	2	2	2	2	1	2	1	1	2	2	2	2	2	2
6	П. Артем	1	2	1	2	2	1	2	1	2	2	1	2	2	1	2
7	Р. Диана	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	1	2	2	1
8	Р. Даниил	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	2	1	2	1	1
9	С. Никита	2	2	2	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1
10	С. Захар	2	2	1	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1
11	С. Егор	2	1	2	2	1	1	1	2	2	1	2	1	1	1	1
12	Ф. Роман	2	2	2	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	2	2
13	Ш. Андрей	2	2	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2
14	Ш. Владислав	2	2	2	2	1	2	1	1	1	2	2	2	1	2	2
15	Ш. Андрей	2	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	2
16	Я. Анна	2	2	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	2	1

№ п/п	Ф.И.О.	Критерий 1 / Класс				Критерий 2 / Класс				Критерий 3 / Класс				Критерий 4 / Класс				Критерий 5 / Класс				Среднее / Класс			
		9	10 (I)	10 (II)	11	9	10 (I)	10 (II)	11	9	10 (I)	10 (II)	11	9	10 (I)	10 (II)	11	9	10 (I)	10 (II)	11	9	10 (I)	10 (II)	11
1	К. Мария	0,49	0,41	0,61	0,71	0,57	0,53	0,72	0,84	0,52	0,53	0,64	0,79	0,43	0,52	0,86	0,84	0,46	0,46	0,81	0,94	**0,49**	**0,49**	**0,65**	**0,79**
2	К. Никита	0,40	0,59	0,79	0,94	0,49	0,59	0,76	0,94	0,45	0,60	0,74	0,86	0,52	0,41	0,72	0,85	0,59	0,60	0,75	0,93	**0,49**	**0,56**	**0,71**	**0,86**
3	П. Александр	0,44	0,44	0,63	0,80	0,46	0,51	0,64	0,80	0,53	0,45	0,63	0,83	0,41	0,53	0,77	0,80	0,52	0,56	0,76	0,93	**0,47**	**0,50**	**0,67**	**0,81**
4	П. Ярослав	0,51	0,52	0,72	0,83	0,42	0,51	0,64	0,81	0,59	0,47	0,67	0,80	0,40	0,58	0,68	0,88	0,43	0,58	0,85	0,89	**0,47**	**0,53**	**0,69**	**0,82**
5	П. Игорь	0,54	0,54	0,69	0,87	0,49	0,51	0,69	0,79	0,52	0,43	0,57	0,85	0,59	0,58	0,75	0,87	0,45	0,52	0,87	0,90	**0,52**	**0,52**	**0,67**	**0,81**
6	П. Артем	0,40	0,48	0,67	0,84	0,41	0,50	0,67	0,81	0,55	0,57	0,72	0,90	0,54	0,52	0,92	0,92	0,49	0,45	0,64	0,88	**0,48**	**0,50**	**0,68**	**0,85**
7	Р. Диана	0,50	0,56	0,74	0,84	0,41	0,55	0,72	0,87	0,45	0,43	0,54	0,94	0,40	0,47	0,78	0,86	0,53	0,44	0,85	0,92	**0,46**	**0,49**	**0,63**	**0,77**
8	Р. Даниил	0,58	0,48	0,61	0,73	0,48	0,49	0,65	0,81	0,53	0,55	0,68	0,80	0,54	0,41	0,76	0,84	0,48	0,60	0,79	0,94	**0,52**	**0,51**	**0,66**	**0,80**
9	С. Никита	0,44	0,41	0,54	0,72	0,49	0,52	0,68	0,86	0,46	0,42	0,60	0,80	0,55	0,57	0,68	0,87	0,55	0,58	0,70	0,93	**0,50**	**0,50**	**0,64**	**0,81**
10	С. Захар	0,59	0,54	0,72	0,89	0,57	0,43	0,59	0,72	0,57	0,50	0,65	0,81	0,40	0,45	0,89	0,79	0,51	0,41	0,87	0,89	**0,53**	**0,47**	**0,62**	**0,79**
11	С. Егор	0,53	0,53	0,67	0,80	0,55	0,40	0,53	0,66	0,41	0,49	0,60	0,90	0,51	0,44	0,56	0,87	0,43	0,60	0,71	0,89	**0,49**	**0,49**	**0,61**	**0,74**
12	Ф. Роман	0,52	0,46	0,56	0,75	0,42	0,45	0,65	0,83	0,41	0,57	0,68	0,80	0,53	0,50	0,65	0,76	0,54	0,50	0,80	0,91	**0,48**	**0,50**	**0,63**	**0,77**
13	Ш. Андрей	0,53	0,47	0,67	0,83	0,44	0,56	0,74	0,90	0,47	0,40	0,57	0,96	0,49	0,41	0,72	0,80	0,43	0,44	0,64	0,92	**0,47**	**0,46**	**0,63**	**0,79**
14	Ш. Владислав	0,57	0,57	0,71	0,88	0,52	0,51	0,66	0,82	0,60	0,52	0,70	0,85	0,52	0,57	0,75	0,91	0,53	0,54	0,69	0,91	**0,55**	**0,54**	**0,70**	**0,86**
15	Ш. Андрей	0,54	0,51	0,68	0,79	0,52	0,54	0,64	0,78	0,43	0,40	0,60	0,92	0,47	0,41	0,74	0,79	0,43	0,48	0,63	0,82	**0,48**	**0,47**	**0,62**	**0,76**
16	Я. Анна	0,54	0,59	0,78	0,95	0,48	0,52	0,63	0,78	0,51	0,46	0,66	0,97	0,40	0,44	0,78	0,76	0,59	0,53	0,73	0,92	**0,50**	**0,51**	**0,68**	**0,82**
	Среднее	**0,51**	**0,51**	**0,67**	**0,82**	**0,48**	**0,51**	**0,66**	**0,81**	**0,50**	**0,49**	**0,64**	**0,86**	**0,48**	**0,49**	**0,75**	**0,84**	**0,50**	**0,52**	**0,76**	**0,91**	**0,49**	**0,50**	**0,66**	**0,80**

Анализ результатов показывает стабильное повышение уровня усвоения учебного материала по информатике по новой технологии с использованием вычислительных экспериментов и 3D моделирования:

Критерии	На входе (после 9 кл.)	После 1 года обучения	После 2 года обучения
Владение основами 3-Д моделирования и объектно-ориентированного программирования.	0,51	0,67	0,82
Умение описать алгоритм создаваемой модели	0,48	0,66	0,81
Владение навыками анализа и вычислительных экспериментов	0,50	0,64	0,86
Знание основных этапов вычислительного эксперимента	0,48	0,75	0,84
Умение применять результаты экспериментов в изучении теоретического материала и решении задач	0,5	0,76	0,91

Диаграмма «Влияние изменения уровня сформированности приемов вычислительных экспериментов и моделирования на усвоение учебного материала»:



Результаты подтверждают предложенную гипотезу и свидетельствуют о том, что эксперимент по формированию приемов вычислительных экспериментов у учащихся 10-11 классов положительно влияет на обучение информатике в старшей школе.

ФРАГМЕНТЫ УРОКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Пример 1. Вычислительный эксперимент на этапе изучения новой темы.

Раздел: Алгоритмизация и программирование.

Тема: Целочисленные алгоритмы. Оценка сложности вычислений.

Задача. Среди целых чисел, принадлежащих отрезку [A;B], выбрать числа, имеющие не менее K различных четных натуральных делителей, не считая самого числа. Для каждого найденного числа определить количество делителей, подходящих под условие, и максимальный из них.

1. *Постановка проблемы и ее анализ.*

   Многие задачи, решаемые с помощью программирования, систем автоматизированного проектирования, электронных таблиц и других средств ИКТ, подразумевают обработку целых чисел и вывод результата тоже в формате целого числа. Выполнение промежуточных операций над числами также должны выполняться в соответствующем формате, что определяется особенностями представления чисел в памяти компьютера и скоростью их обработки процессором. Одной из подзадач является определение делителей числа, проверка числа на простоту и т.п. (например, в алгоритмах шифрования). Существует несколько способов поиска делителей d числа N с последующей проверкой:

   - перебор всех значений возможных делителей d от 1 до N;
   - перебор всех значений возможных делителей d от 2 до N//2;
   - «решето Эратосфена» - перебор всех значений возможных делителей d от 2 до $\sqrt{N}$.

   Учащиеся могут провести эксперимент и оценить скорость решения задачи подобного класса при различных значениях параметров A, B, K.

2. *Построение математической модели.*

   - проверка, является ли d делителем числа N, может производиться с помощью сравнения остатка от деления N на d с нулем;
   - в первом случае перебираются абсолютно все значения $d = [1; N]$;
   - во втором случае учитываем, что проверка делимости числа N на 1 и на само себя не имеет смысла. Кроме того, любое число не может иметь натуральный делитель больше, чем половина от этого числа.
   - алгоритм «решето Эратосфена» заключается в проверке делимости числа N на $d = [1; \sqrt{N}]$. При выполнении условия делимости получаем сразу два значения делителя: {d; N div d}, где div – целая часть от деления N на d.

3. *Исследование модели.*

   С помощью вычислительного эксперимента учащиеся могут установить истинность следующих высказываний:

   - скорость работы алгоритмов не зависит от количества обрабатываемых значений;
   - скорость работы первого и второго алгоритмов дают примерно одинаковые значения при небольшом количестве обрабатываемых значений;
   - скорость работы третьего алгоритма значительно выше скорости работы первых двух алгоритмов при достаточно большом количестве обрабатываемых значений.

4. *Разработка алгоритма решения задачи.*

   Реализация всех трех алгоритмов осуществляется с помощью программирования на языке Python. Для измерения скорости выполнения программы используется метод datetime.now() из библиотеки datetime.

   Далее приведен листинг программы:

```python
from datetime import *
from math import *

A,B,K = map(int,input('Значения параметров A,B,K: ').split())

def KD1(chislo):
    k = 0
    md = 0
    for d in range(1,chislo):
        if (chislo%d==0) and (d%2==0):
            k += 1
            if d>md: md = d
    return k,md

def KD2(chislo):
    k = 0
    md = 0
    for d in range(1,chislo//2+1):
        if (chislo%d==0) and (d%2==0):
            k += 1
            if d>md: md = d
    return k,md

def KD3(chislo):
    k = 0
    md = 0
    for d in range(2,int(sqrt(chislo))):
        if chislo%d==0:
            if d%2==0:
                k += 1
                if d>md: md = d
            if (chislo//d)%2==0:
                k += 1
                if chislo//d>md: md = chislo//d
    return k,md

# Алгоритм №1
start = datetime.now()
for x in range(A,B):
    x_kd,x_md = KD1(x)
    if x_kd>=K:
        print(x_kd,x_md)
finish = datetime.now()
print('Время работы алгоритма №1:', finish-start)

# Алгоритм №2
start = datetime.now()
for x in range(A,B):
    x_kd,x_md = KD2(x)
    if x_kd>=K:
        print(x_kd,x_md)
finish = datetime.now()
print('Время работы алгоритма №2:', finish-start)

# Алгоритм №3
start = datetime.now()
for x in range(A,B):
    x_kd,x_md = KD3(x)
    if x_kd>=K:
        print(x_kd,x_md)
finish = datetime.now()
print('Время работы алгоритма №3:', finish-start)
```

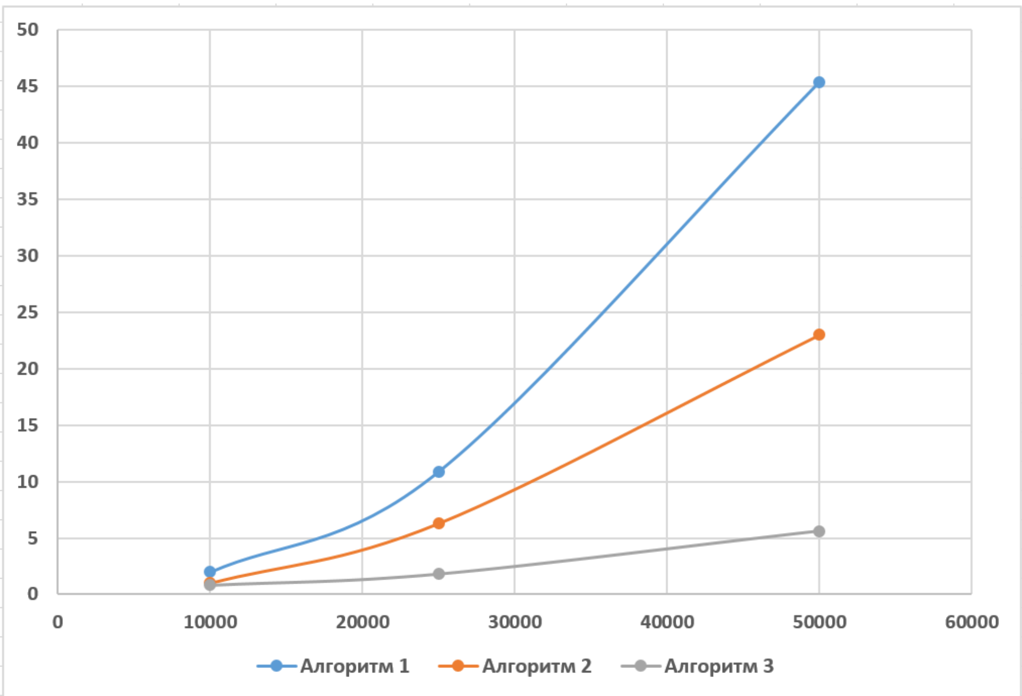
5. *Визуализация математической модели.*

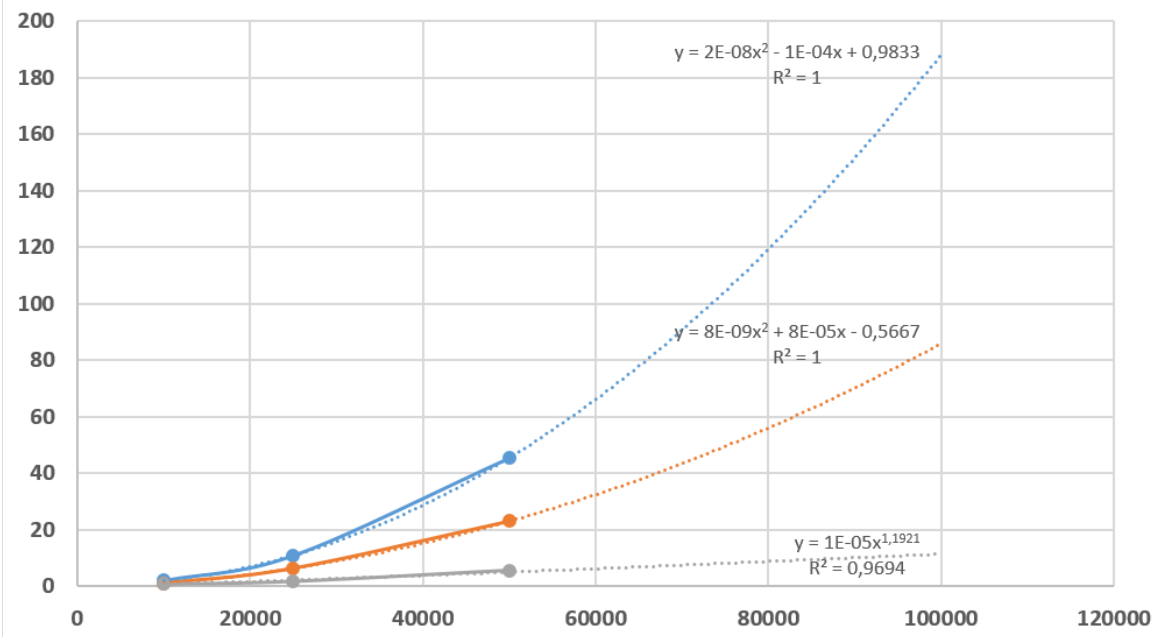
При проведении вычислительного эксперимента последовательно вводятся различные значения параметров, начиная от небольшого диапазона. Полученные результаты заносятся в таблицу и выполняется построения графиков, например, с использованием электронных таблиц. Также можно построить линии тренда, оценить сложность используемых алгоритмов и выполнить прогноз относительно скорости обработки «больших данных».

6. *Проведение расчетов.*

Начальные значения параметров и поученные в ходе эксперимента результаты приведены в таблице.

	Параметры [A,B,K]			
	[1,10000,30]	**[1,25000,30]**	**[1,50000,30]**	***[1,100000,30] прогноз***
Алгоритм 1	2 сек	10,9 сек	45,4 сек	> 180 сек
Алгоритм 2	1 сек	6,3 сек	23 сек	> 80 сек
Алгоритм 3	0,8 сек	1,8 сек	5,6 сек	< 20 сек





7. <u>*Анализ полученных результатов.*</u>

Построенная математическая модель и проведенный эксперимент позволяют учащимся убедиться во влиянии выбранного метода обработки данных на скорость работы алгоритма и важности данного выбора.

Учащиеся могут самостоятельно провести эксперимент по корректировку функции линии тренда и проверке прогнозируемых результатов с помощью разработанной программы.

Пример 2. Вычислительный эксперимент при решении задач с использованием электронных таблиц.

Раздел: Информационные технологии.

Тема: Анализ данных с помощью электронных таблиц с использованием численных методов.

<u>*Задача.*</u> Во время бейсбольного матча игрок атакующей команды отбил мяч, пролетающий на высоте 1 м над землей. Мяч полетел под углом α к горизонту со скоростью 30 м/с. Определите, каким должен быть угол α, чтобы произошел «Хоумран», т.е. мяч смог перелететь через ограждение высотой 3 м, находящийся на расстоянии 80 м.

1. *Постановка проблемы и ее анализ.*

   Входные параметры:

   - V_0 = 30 м/с – начальная скорость мяча;
   - H = 2 м – разница между высотой пролетающего мяча и высотой ограждения;
   - S = 80 м – расстояние до ограждения.

   Значения на выходе:

   - {α, f(α)} – значение угла и текущая высота мяча.

   Формулирование гипотез, объясняющих поведение и развитие объекта: когда игрок отбивает мяч, он начинает движение в сторону ограждения, набирая высоту до максимальной точки, а затем начинает снижаться. Если в момент, когда мяч пролетит 80 м, он будет находиться на высоте не менее, чем 3 м от уровня земли (или 2 м от уровня начального местоположения), то мяч сможет перелететь через ограждение.

2. *Построение математической модели.*

   Примем следующие упрощения:

   - мяч – материальная точка;
   - сопротивление воздуха не учитываем;
   - ускорение свободного падения $g \approx 9{,}81$ м/с^2.

   Разместим мяч в прямоугольной декартовой системе координат, начальное положение мяча в точке (0;0). Тогда движение мяча будет описываться системой уравнений:

$$\begin{cases} x = V_0 \cdot t \cdot cos\alpha \\ y = V_0 \cdot t \cdot sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

   Выразим переменную t из первого уравнения и подставим результат во второе уравнение системы:

$$t = \frac{S}{V_0 \cdot cos\alpha}$$

$$y = S \cdot tg\alpha - \frac{g \cdot S^2}{2 \cdot V_0^2 \cdot cos^2\alpha}$$

Когда мяч пролетит 120 м, необходимо, чтобы координата у была равна Н (или более). При этом координата х станет равна S. Имеем:

$$H = S \cdot tg\alpha - \frac{g \cdot S^2}{2 \cdot V_0^2 \cdot cos^2\alpha}$$

Приведем уравнение к виду $f(\alpha) = 0$:

$$f(\alpha) = S \cdot tg\alpha - \frac{g \cdot S^2}{2 \cdot V_0^2 \cdot cos^2\alpha} - H = 0$$

3. *Исследование модели.*

Для построенной функции $f(\alpha)$ необходимо определить значение параметра α, при котором функция принимает значение 0. Значение параметра необходимо искать в диапазоне $\alpha = [0; {}^{\pi}/_{2}]$. При этом необходимо учесть, что уравнение может иметь несколько решений.

4. *Разработка алгоритма решения задачи.*

Вычисления будут производиться с помощью электронной таблицы.

В ячейки В1:В3 запишем начальные значения параметров.

Заполним таблицу:

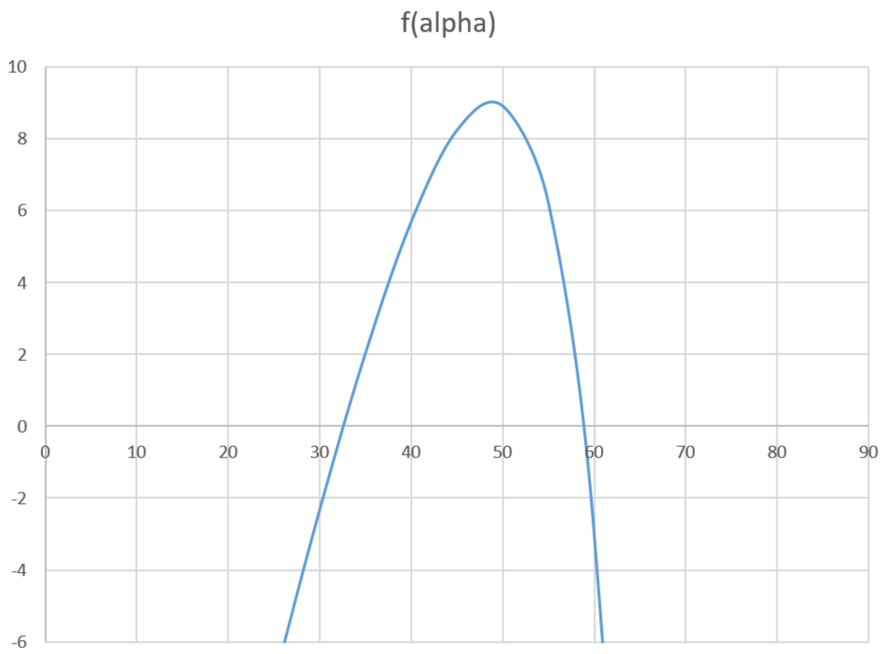
- Столбец А – значения угла α в градусах в диапазоне $[0; 90]$ с шагом 5.
- Столбец В – значения угла α в радианах.
- Столбец С – время полета мяча.
- Столбец D – текущее значение координаты у.
- Столбец Е – текущее значение функции $f(\alpha)$.

Первые несколько строк таблицы приведены ниже:

	A	B	C	D	E
6	**Угол**	**Угол (рад)**	**Время**	**y**	**f(alpha)**
7	0	=РАДИАНЫ(A7)	=S/V/COS(B7)	=V*SIN(B7)*C7-9,81*C7^2/2	=D7-H
8	5	=РАДИАНЫ(A8)	=S/V/COS(B8)	=V*SIN(B8)*C8-9,81*C8^2/2	=D8-H
9	10	=РАДИАНЫ(A9)	=S/V/COS(B9)	=V*SIN(B9)*C9-9,81*C9^2/2	=D9-H

5. *Визуализация математической модели.*

Построим график функции $f(\alpha)$.

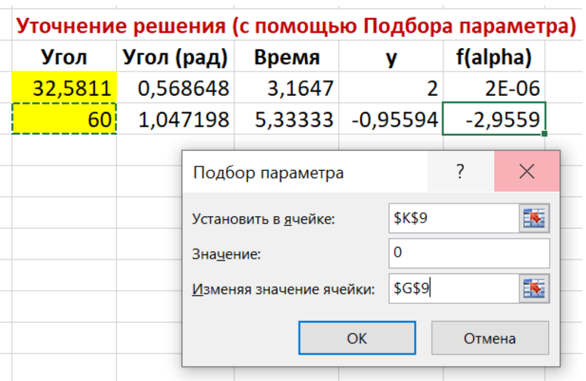


6. *<u>Проведение расчетов.</u>*

По графику можно определить, что $f(\alpha) = 0$ при $\alpha \approx \{30; 60\}$.

Полученные значения угла α выпишем в отдельные ячейки.

С помощью инструмента «Подбор параметра» уточним значения углов:



Уточнение решения (с помощью Подбора параметра)				
Угол	Угол (рад)	Время	y	f(alpha)
32,5811	0,568648	3,1647	2	2E-06
60	1,047198	5,33333	-0,95594	-2,9559

Получим два уточненных значения: $\alpha = \{32{,}58; 58{,}85\}$.

7. *<u>Анализ полученных результатов.</u>*

Решаю предложенную задачу, учащиеся построили математическую модель с использованием физических законом движения материальной точки. Затем провели расчеты, визуализацию полученных значений и уточнили результат с помощью средств электронной таблицы.

Учащимся также можно предложить самостоятельно провести эксперимент, модифицировав построенную модель так, чтобы учитывалось сопротивление воздуха при движении мяча. А затем сравнить полученные результаты вычислений с использованием двух математических моделей.

Пример 3. Вычислительный эксперимент в проектно-исследовательской работе.

Тема: Решение транспортных задач в САПР MathCAD с использованием свойств многомерного пространства (ученик 10 класса Ш. Алексей).

В работе рассматриваются понятия четырехмерного пространства и гиперкуба, а также вопросы практического применения тессеракта к решению транспортных задач — математических задач линейного программирования об оптимальном плане перевозок грузов из пунктов отправления в пункты потребления с минимальными затратами. Проводится анализ методов решения транспортных задач с помощью гиперкуба и САПР MathCAD.

Задача (в общем виде). Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах a_1, a_2, ... a_m. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах b_1, b_2 ... b_n. Известны C_{ij} , i=1,2,...m; j=1,2,...n — стоимости перевозки единиц груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Переменными транспортной задачи являются x_{ij} – объемы перевозок от i-го поставщика каждому j-му потребителю.

Потребители

Поставщики

a_j \ b_j	b_1	b_2	. . .	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	. . .	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	. . .	c_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
a_m	c_{m1}	c_{m2}	. . .	c_{mn}

Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью, и суммарные затраты на перевозку всех грузов являются минимальными.

1. *Постановка проблемы и ее анализ.*

   Необходимо найти переменные задачи $X=(x_{ij})$, $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$, удовлетворяющие системе ограничений, при которой запасы всех m поставщиков вывозятся полностью, удовлетворены запросы всех n потребителей, условиям не отрицательности и обеспечивающие минимум целевой функции (например, минимальная стоимость перевозок).

2. *Построение математической модели.*

   Предположим, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей. Произведение $c_{ij}\ x_{il}$ определяет затраты на перевозку груза от i-го поставщика j-му потребителю; суммарные затраты на перевозку всех грузов равны $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{il} x_{ij}$.

   По условию задачи требуется обеспечить минимум суммарных затрат. Следовательно, целевая функция (функция, связывающая цель с управляемыми переменными в задаче оптимизации) имеет вид: $Z(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$.

   Система ограничений задачи состоит из двух групп уравнений. Первая группа из m уравнений описывает тот факт, что запасы всех m поставщиков вывозятся полностью: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $i=1,2,\dots,m$.

   Вторая группа из n уравнений выражает требование полностью удовлетворить запросы всех n потребителей: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j=1, 2, \dots, n$.

Тогда математическую модель транспортной задачи можно описать так:

Математическая модель

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n.$$

3. *Исследование модели*

В зависимости от сбалансированности различают три типа задач:

- сбалансированная задача, в случае, если количество произведенной продукции равно суммарной потребности в ней;
- задача в условиях перепроизводства: для сведения ее к сбалансированной необходимо ввести фиктивный пункт потребления, стоимость перевозки единицы продукции в который можно взять равной нулю;
- задача в условиях дефицита: для сведения ее к сбалансированной транспортной задаче необходимо ввести фиктивный пункт производства, стоимость перевозки с которого можно принять равной 0.

4. *Разработка алгоритма решения сбалансированной задачи.*

В таблице приведены исходные данные транспортной задачи: расстояние от поставщика к потребителю в километрах, и спрос потребителя в тоннах некоего товара. Необходимо построить оптимальный план перевозок.

Постовщики	**Возможности поставщиков**	**Потребители и их спрос**				
		I	**II**	**III**	**IV**	**V**
		150	350	200	100	100
I	500	3	3	5	3	1
II	300	4	3	2	4	5
III	100	3	7	5	4	2

Целевая функция L=$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ в рассматриваемой задаче стремится к минимуму.

Способ 1. С помощью гиперкуба.

Гиперкуб – обобщение куба с произвольным числом измерений. Для решения транспортной задачи рассматривается 4 вида гиперкубов: отрезок, квадрат, куб и тессеракт.

- начальный опорный план составляется с использованием переменных, значения которых в последствии будут найдены при помощи построения сечения гиперкуба в системе координат;
- составляем систему ограничений:
- определяем диапазон значений переменной X;
- система ограничений определяет многогранник ограничений;
- определяем целевую функцию F и находим ее наименьшее значение на многограннике ограничений.

Способ 2. С помощью САПР MathCAD.

- определяем матрицы коэффициентов A,B,C;
- строим функции суммарных значений по строкам и столбцам таблицы для проверки ограничений;
- строим целевую функцию и определяем ее наименьшее значение.

5. *Визуализация математической модели.*

Для решения задачи с использованием гиперкуба необходимо выполнить построение многогранников в пространстве согласно плану ограничений. При решении транспортной задачи с помощью САПР MathCAD благодаря используемому в системе интерфейсу WYSIWYG можно варьировать начальные параметры и при этом наблюдать их влияние на конечный результат.

6. *Проведение расчетов.*

Способ 1. С помощью гиперкуба.

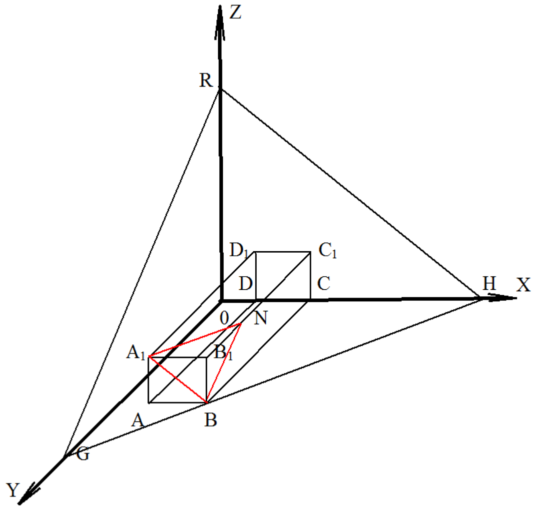
- начальный опорный план:

Постовщики	Возможности поставщиков	Потребители и их спрос				
		I	II	III	IV	V
		150	350	200	100	100
I	500	3 x	3 y	5 0	3 z	1 500-x-y-z
II	300	4 0	3 350-y	2 200	4 100-z	5 0
III	100	3 150-x	7 0	5 0	4 0	2 x-50

- все значения таблицы неотрицательны:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 \\ 350 - y \geq 0, \quad 100 - z \geq 0, \quad 150 - x \geq 0, \quad x - 50 \geq 0 \\ 500 - x - y - z \end{cases}$$

- из двух последних уравнений второй строки следует, что x∈[50;150]. Система определяет некоторый многогранник. Чтобы его построить изобразим сначала многогранник, определяемый первой и второй строкой данной системы - параллелепипед ABCDA1B1C1D1. Уравнение 500-x-y-z определяет плоскость (RGH), пересекающую параллелепипед в точках A1, B, N. На многограннике A1D1C1NADCB выполняются все условия данной системы. (многогранник ограничений);



- найдём общую стоимость перевозок, сложив и перемножив стоимости и объёмы перевозимого товара: x-y-2z+2700;
- найдем наименьшее значение функции F = 2700-(y-x+2z) на многограннике ограничений: F_{min} = 2700-F_{max};
- F_{max} = 500 в точке многогранника A1 (50;350;100);
- подставив значение в таблицу, получим план перевозок:

50	350	0	100	0
0	0	200	0	0
100	0	0	0	0

- данный план требует оптимизации: перераспределим 100 т груза от второго поставщика потребителю V. Получим план с общей стоимостью перевозок 2300.

<u>Способ 2. С помощью САПР MathCAD.</u>

$$ORIGIN := 1$$

$$C := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 150 \\ 350 \\ 200 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} \qquad a := \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 900 \qquad \sum_{j=1}^{5} b_j = 900$$

$$x_{3,5} := 0$$

$$sum\_rows(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..3 \\ \quad \left| \begin{array}{l} v_i \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 1..5 \\ \quad v_i \leftarrow v_i + x_{i,j} \end{array} \right. \\ v \end{array} \right. \qquad sum\_columns(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 1..5 \\ \quad \left| \begin{array}{l} v_j \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..3 \\ \quad v_j \leftarrow v_j + x_{i,j} \end{array} \right. \\ v \end{array} \right.$$

$$Z(x) := \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} \left(C_{i,j} \cdot x_{i,j}\right)$$

Given

$$x \geq 0 \qquad sum\_rows(x) = a \qquad sum\_columns(x) = b$$

$$x := Minimize(Z, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 50 & 250 & 0 & 100 & 100 \\ 0 & 100 & 200 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{Z(x) = 2.3 \times 10^{3}}$$

7. *<u>Анализ полученных результатов.</u>*

Рассмотренные методы позволяют получить оптимальный план перевозок с одинаковым значением общей стоимости транспортировки груза. При этом можно сравнить методы решения не только по полученному результату, но и по трудозатратам. Так метод гиперкуба требует математических знаний, но позволяет достаточно быстро проводить вычисления. Удобство САПР MathCAD проявляется в возможности использовать одну задачу как шаблон для других, однако, чтобы сделать этот шаблон, нужно иметь навык работы с программой.