ISSN 1991-3087

ЖУРНАЛ НАУЧНЫХ публикаций

АСПИРАНТОВ И ДОКТОРАНТОВ

14

2014

№4
Апрель

- Создание благоприятной среды для стимулирования развития субъектов семейного бизнеса и малого предпринимательства.
- Роль эффективности таможенных служб в защите конкурентоспособности национальной экономики.
- Проблемы организации Государственных закупок и пути их решения.
- Современная миграционная ситуация в Узбекистане и пути её регулирования.
- Интернет-зависимость как объект исследований в современной психологической науке.
- Перспективы использования многомерных функций для оценки качества работы современных видеокодеков
- Анализ напряженного состояния токонесущих ортотропных оболочек в нестационарном магнитном поле.

и многое другое.

ЖУРНАЛ НАУЧНЫХ публикаций

Подписной индекс №42457

СОДЕРЖАНИЕ

ЭКОНОМИКА

7. ***Зарочинцева Ю. В.***
Мировой рынок навигационных услуг и технологий.

10. ***Тайлакова Ф. С., Хашимов Б. Х.***
Создание благоприятной среды для стимулирования развития субъектов семейного бизнеса и малого предпринимательства.

12. ***Талиб А. А.***
Роль МСФО в сближении национального и международного бухгалтерского учета.

14. ***Айбешов Х. А., Юлчиев Э. Ю.***
Необходимость формирования социального партнерства в аграрном секторе экономики.

16. ***Бокова Ю. И.***
Совершенствование учета расчетов с персоналом по оплате труда на примере ООО «Нива» Эртильского района Воронежской области.

20. ***Овчарова Н. В.***
Ключевые условия реализации проектов государственно-частного партнерства в социальной сфере Украины: финансовый аспект.

23. ***Рустембаева А. К.***
Проблемы организации Государственных закупок и пути их решения.

25. ***Фурсов С. В.***
Инструменты стратегического управления промышленным предприятием.

30. ***Болтабаева Л. Р., Хашимов Б. Х.***
Создание благоприятной предпринимательской среды как фундамент для развития малого бизнеса и частного предпринимательства.

33. ***Алимходжаев С. Р., Муратова Ш. Н.***
Основные принципы экологизации топливно-энергетического комплекса при добыче топливно-минеральных ресурсов.

37. ***Шарипова Д. Н.***
Роль эффективности таможенных служб в защите конкурентоспособности национальной экономики.

39. ***Шарипова Д. Н.***
Сущность формирования высокоэффективного кадрового потенциала в таможенных органах.

42. ***Солоед Е. В.***
Проблемы повышения конкурентоспособности малых предприятий в Украине.

44. ***Зенкина Е. С.***
Банки как участники современного кредитного рынка России.

46. ***Эралиев А. А., Саидова М. Ж.***
Перспективы гостиничного бизнеса в Узбекистане.

49. ***Ауелбеков Е. А.***
Особенности казахстанского менеджмента.

51. ***Бушуева О. А.***
Сравнительный анализ оценочной деятельности России и зарубежных стран.

53. ***Ельникова Ю. В.***
Анализ проблем и перспектив реализации концепции пруденциального надзора за деятельностью профессиональных участников рынка производных финансовых инструментов.

57. ***Лучкина А. А.***
Экономическая сущность категории «затраты», соотношение с понятиями «издержки» и «расходы».

ЮРИСПРУДЕНЦИЯ

62. ***Андреев В. В.***
Кто умственно отсталый, когда речь заходит о смертной казни?

64. ***Воробьев Г. В.***
Разделение властей в современном Российском государстве.

67. ***Кравец Н. В.***
Правовое регулирование органического сельского хозяйства в контексте реализации принципа экологизации аграрного производства в Украине.

СОДЕРЖАНИЕ

ХИМИЯ И ХИМИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

293. ***Медников Е. В., Петрова В. Е.***
Способы интенсификации производства алкилсульфонатов.

295. ***Медников Е. В., Щемелинина И. М.***
Изучение направлений совершенствования процесса пиролиза.

297. ***Мохов В. М., Джандалиева С. Ю.***
Повышение экономических показателей деятельности производства путем замены реагента при получении винилиденхлорида жидкофазным дегидрохлорированием 1,1,2-трихлорэтана.

МАТЕМАТИКА

299. ***Симаков Е. Е., Захарова Л. В.***
Создание программного обеспечения для решения кубических уравнений с использованием формулы Кардано.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

306. ***Баженов Р. И., Афанасьева М. А.***
Разработка программной модели контроля дверей холодильника на основе теории автоматов.

309. ***Калистратов Д. С.***
Перспективы использования многомерных функций для оценки качества работы современных видеокодеков.

312. ***Кузьминых Д. Г.***
Технология ADO.NET для разработки приложения, работающего с базой данных.

314. ***Жуков А. С., Медведев В. Н., Докутович А. Б., Евсеев Е. В., Кац И. Д., Попов А. С., Ребров А. И., Лим В. Г.***
Переход к автоматизации процессов корпоративного контроля за соблюдением требований промышленной безопасности и техническим состоянием опасных производственных объектов Единой системы газоснабжения ОАО «Газпром».

321. ***Белов И. В., Фендрикова Е. И., Моисеев В. В.***
Исследование модели угроз для отдела кадров в экспертной системе Digital Security Office.

ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

324. ***Бачурин П. Н.***
Автоматизированная система определения исполнительной схемы заземляющих устройств электрических подстанций.

МЕХАНИКА

328. ***Индиаминов Р. Ш., Хайриев Э. И., Каримова Г.***
Анализ напряженного состояния токонесущих ортотропных оболочек в нестационарном магнитном поле.

ВОЕННЫЕ НАУКИ

332. ***Герасимов С. Д., Марахин Е. Ю., Авладеев А. С.***
Контроль уровня масла в системе гидроуправления и смазки трансмиссии танка Т-72.

СОЗДАНИЕ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КУБИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМУЛЫ КАРДАНО

Симаков Егор Евгеньевич,
аспирант кафедры теории и методики обучения и воспитания
Сахалинского государственного университета,
Захарова Лидия Владимировна,
ученица 10В класса информационно-технологического профиля
МБОУ Лицей №1 г. Южно-Сахалинска.

Статья посвящена изучению методов решения кубических уравнений. Особое внимание уделяется формуле Кардано. В статье приведен подробный алгоритм решения уравнений третьей степени с использованием данного метода, а также его реализация в объектно-ориентированной среде Delphi.

Ключевые слова: формула Кардано, программирование, кубические уравнения.

Введение

Уже в древности люди осознали, как важно научиться решать алгебраические уравнения вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ – ведь к ним сводятся очень многие вопросы естествознания. Также проводились исследования по получению формул для решения уравнений любой степени *n*, при помощи которых можно выразить корни уравнения через его коэффициенты, т.е., решить уравнение в радикалах. Однако только в XVI веке итальянским математикам удалось сформулировать алгоритм решения уравнений третьей и четвертой степеней.

Целью исследования является изучение существующих методов, а также разработка алгоритма и создание на его основе программного обеспечения для решения кубических уравнений на основе формулы Кардано.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть различные методы решения уравнений третьей степени.
2. Изучить особенности применения формулы Кардано для решения кубических уравнений.
3. Создать программное обеспечение для решения кубических уравнений.

Методы решения кубических уравнений

В области комплексных чисел, согласно основной теореме алгебры, кубическое уравнение всегда имеет 3 корня (с учётом кратности). Так как каждый вещественный многочлен нечётной степени имеет хотя бы один вещественный корень, все возможные случаи состава корней кубического уравнения исчерпывается тремя, которые легко различаются с помощью дискриминанта $\Delta = -4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 + 18abcd - 27a^2d^2$ [2]:

- Если $\Delta > 0$, тогда уравнение имеет три различных вещественных корня.
- Если $\Delta < 0$, то уравнение имеет один вещественный и пару комплексно сопряжённых корней.
- Если $\Delta = 0$, тогда хотя бы два корня совпадают. Это может быть, когда уравнение имеет двойной вещественный корень и ещё один отличный от них вещественный корень; либо, все три корня совпадают, образуя корень кратности 3.

Корни кубического уравнения x_1, x_2, x_3 связаны с коэффициентами a, b, c, d следующим образом:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = \frac{c}{a} \qquad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d}$$

Исходя из основных свойств решения кубических уравнений, необходимо дать определение понятию «комплексное число». Комплексные числа — числа вида x + y, где x и y – вещественные числа, i – мнимая единица, то есть: $i^2 = -1$. Числа $x = \Re(z)$ (или Re z) и $y = \Im(z)$ (или Im z) называются соответственно вещественной и мнимой частями z. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$. Если комплексное число z = x + iy, то число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряжённым к z. [1]

Наиболее распространенный метод решения кубических уравнений – ***метод перебора***. [2] Сначала путём перебора находится один из корней уравнения (например, x_1). Вторая стадия решения – это деление многочлена $ax^3 + bx^2 + cx + d$ на двучлен $x - x_1$ и решение полученного квадратного уравнения.

Алгоритм решения кубических уравнений с использованием формулы Кардано

В данном разделе статьи приведен подробный алгоритм решения уравнений третьей степени с помощи формулы Кардано. Данный алгоритм состоит из двух этапов. *На первом этапе* кубические уравнения приводятся к форме, в которой отсутствует член со второй степенью неизвестного. Такие кубические уравнения называют трёхчленными кубическими уравнениями. *На втором этапе* трёхчленные кубические уравнения решаются при помощи сведения их к квадратным уравнениям. [3]

Рассмотрим алгоритм нахождения всех корней кубического уравнения $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, A \neq 0$ на основе описанной выше формулы, а также ее тригонометрической интерпретации. [3,4] Приведем исходное уравнение к каноническому виду. Для этого сделаем замену переменного по формуле $x = y - \frac{B}{3A}: \left(y - \frac{B}{3A}\right)^3 + \frac{B}{A} \cdot \left(y - \frac{B}{3A}\right)^2 + \frac{C}{A} \cdot \left(y - \frac{B}{3A}\right) + \frac{D}{A} = 0$. Раскрыв скобки в левой части уравнения, получим: $y^3 + \frac{3AC - B^2}{3A^2} + \frac{2B^2 - 9ABC + 27A^2D}{27A^3} = 0$. Уравнение приведено к каноническому виду:

$$y^3 + p \cdot y + q = 0 \quad p = \frac{3 \cdot A \cdot C - B^2}{3 \cdot A^2} \quad q = \frac{2 \cdot B^2 - 9 \cdot A \cdot B \cdot C + 27 \cdot A^2 \cdot D}{27 \cdot A^3}$$

Дискриминантом уравнения $y^3 + p \cdot y + q = 0$ называется число $S = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Найдем решение полученного уравнения в виде:

$$y = \sqrt[3]{m+n} + \sqrt[3]{m-n}$$

$$\left(\sqrt[3]{m+n} + \sqrt[3]{m-n}\right)^3 + p \cdot \left(\sqrt[3]{m+n} + \sqrt[3]{m-n}\right) + q = 0$$

$$3 \cdot \left(\sqrt[3]{m+n} \cdot \sqrt[3]{m-n} + \frac{p}{3}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{m+n} + \sqrt[3]{m-n}\right) + (2 \cdot m + q) = 0$$

Число $y = \sqrt[3]{m+n} + \sqrt[3]{m-n}$ удовлетворяет этому равенству, если числа m и n удовлетворяют системе из двух уравнений:

$$2 \cdot m + q = 0 \qquad \sqrt[3]{m+n} \cdot \sqrt[3]{m-n} + \frac{p}{3} = 0$$

Находим числа m и n: $m = \frac{-q}{2} \quad m^2 - n^2 = \frac{-p^3}{27} \quad n^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$

Дальнейшее решение зависит от знака дискриминанта S.

1. ***Пусть дискриминант меньше нуля.*** Тогда уравнение имеет три различных корня.

$$y = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + i \cdot \sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - i \cdot \sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + i \cdot \sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}} \cdot \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - i \cdot \sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}} = \frac{-p}{3}$$

Найдём модуль комплексных чисел $\frac{-q}{2} \pm i \cdot \sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}$:

$$R = \sqrt{\left(\frac{-q}{2}\right)^2 + \left[\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right]^2} = \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)} = \sqrt{\frac{-p^3}{27}}$$

Аргумент числа $\frac{-q}{2} + i \cdot \sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}$ равен (в зависимости от знака q):

- Если $q < 0$, то $F = arctg\left[\frac{\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}}{\left(\frac{-q}{2}\right)}\right]$
- Если $q > 0$, то $F = arctg\left[\frac{\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}}{\left(\frac{-q}{2}\right)}\right] + \pi$
- Если $q = 0$, то $F = \frac{\pi}{2}$

Для *k=0, k=1, k=2* получаем решение:

$$y = \sqrt[3]{R}\cdot\left(\cos\left(\frac{F}{3} + \frac{2\cdot\pi\cdot k}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{F}{3} + \frac{2\cdot\pi\cdot k}{3}\right)\right) + \sqrt[3]{R}\cdot\left(\cos\left(\frac{F}{3} + \frac{2\cdot\pi\cdot k}{3}\right) - i\cdot\sin\left(\frac{F}{3} + \frac{2\cdot\pi\cdot k}{3}\right)\right)$$

$$y = \sqrt{\frac{-p}{3}}\cdot\left(\cos\left(\frac{F}{3} + \frac{2\cdot\pi\cdot k}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{F}{3} + \frac{2\cdot\pi\cdot k}{3}\right)\right) + \sqrt{\frac{-p}{3}}\cdot\left(\cos\left(\frac{F}{3} + \frac{2\cdot\pi\cdot k}{3}\right) - i\cdot\sin\left(\frac{F}{3} + \frac{2\cdot\pi\cdot k}{3}\right)\right)$$

$$y = 2\cdot\sqrt{\frac{-p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{F}{3} + \frac{2\cdot\pi\cdot k}{3}\right)$$

Итак, если дискриминант меньше нуля, то уравнение имеет три различных действительных корня:

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{F}{3}\right) \quad y_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{F}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \quad y_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{F}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$$

2. ***Пусть дискриминант больше нуля.*** Тогда уравнение имеет один действительный корень и два комплексно-сопряжённых.

$$y = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

При этом для любых комплексных значений корней необходимо выполнение условия:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \frac{-p}{3}.$$

Примем аргумент *F* действительных чисел, стоящих под знаком кубического корня, равным нулю. При этом модули этих чисел могут принимать отрицательное значение. Аргумент кубического корня будет принимать 3 значения: *0, 2*π/3, 4*π/3*. Каждое решение $y=y_1$, $y=y_2$, $y=y_3$ будет состоять из суммы двух комплексных чисел $y = z_1 + z_2$.

Число z_1 находится в группе из трёх чисел:

$$z1 = z11 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\cdot(\cos(0) + i\cdot\sin(0)) = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$z1 = z12 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot\left(\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot\left(\frac{-1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z1 = z13 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot\left(\cos\left(\frac{4\cdot\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4\cdot\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot\left(\frac{-1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Число z_2 находится в группе из трёх чисел:

$$z2 = z21 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot(\cos(0)+i\cdot\sin(0)) = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,.$$

$$z2 = z22 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot\left(\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot\left(\frac{-1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z2 = z23 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot\left(\cos\left(\frac{4\cdot\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4\cdot\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot\left(\frac{-1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Для действительных значений кубических корней выполняется обозначенное выше условие. Поэтому действительный корень уравнения $y_1 = z_{11} + z_{21}$. Учитывая равенство $\left(\frac{-1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1$, получим два комплексно сопряжённых корня: $y_2 = z_{12} + z_{23}$, $y_3 = z_{13} + z_{22}$.

Итак, если дискриминант больше нуля, то уравнение имеет один действительный корень и два комплексно-сопряжённых корня:

$$y1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$y2 = \frac{-1}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)$$

$$y3 = \frac{-1}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)$$

3. ***Дискриминант равен нулю.*** В этом случае уравнение имеет три действительных корня, и два корня из трёх обязательно совпадают друг с другом. Рассуждая точно так же, как в случае с положительным дискриминантом, учитывая равенство $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=0$, из формул корней уравнения с положительным дискриминантом получим:

$$y1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} \qquad y2 = \frac{-1}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\right)+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}-\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\right)$$

$$y3 = \frac{-1}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\right)-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}-\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\right)$$

Итак, если дискриминант равен нулю, то уравнение имеет три действительных корня, и два корня из трёх обязательно совпадают друг с другом: $y_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{-q}{2}}, y_2 = -\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}, y_3 = -\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$.

Теперь получим решение исходного кубического уравнения $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, A \neq 0$. Дискриминант этого уравнения равен:

$$S = \frac{4 \cdot (3AC - B^2)^3 + (2B^2 - 9ABC + 27A^2D)^2}{2916A^6}$$

В зависимости от знака дискриминанта S возможны три случая:

- Если $S < 0$, то:

$$x1 = 2 \cdot \sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{F}{3}\right) - \frac{B}{3 \cdot A} \quad x2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{F}{3} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) - \frac{B}{3 \cdot A} \quad x3 = 2 \cdot \sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{F}{3} + \frac{4 \cdot \pi}{3}\right) - \frac{B}{3 \cdot A}$$

- Если $S > 0$, то:

$$x1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{B}{3 \cdot A}$$

$$x2 = \frac{-1}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right) - \frac{B}{3 \cdot A} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right)$$

$$x3 = \frac{-1}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right) - \frac{B}{3 \cdot A} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right)$$

- Если $S = 0$, то:

$$x1 = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{-q}{2}} - \frac{B}{3 \cdot A} \quad x2 = -\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} - \frac{B}{3 \cdot A} \quad x3 = -\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} - \frac{3}{3 \cdot A}$$

При этом: $p = \frac{3AC - B^2}{3A^2}$ $q = \frac{2B^2 - 9ABC + 27A^2D}{27A^3}$ $S = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Аргумент F вычисляется по формулам, рассмотренным выше, исходя из знака q.

Реализация алгоритма в объектно-ориентированной среде программирования Delphi

Авторами статьи была создана программа в среде Delphi для решения кубических уравнений с использованием формулы Кардано по разработанному алгоритму, описанному выше.

Для решения уравнения пользователю необходимо ввести коэффициенты уравнения. Результат работы программы – коэффициенты уравнения в канонической форме (p и q), дискриминант (Q) и корни уравнения. Для создания интерфейса использовались следующие компоненты среды Delphi [5]:

- Label – для информирования пользователя о назначении программы, обозначения предназначения полей ввода – вывода;
- Button – для реализации основных действий программы (решения уравнения, очистки полей ввода-вывода, закрытия программы);
- Edit – для организации ввода-вывода данных;
- Panel и GroupBox – для группировки элементов на форме программы.

Рассмотрим код основных процедур программы.

Для решения уравнения необходимо объявить следующие переменные:

- A,B,C,D – коэффициенты исходного уравнения;
- p,q – коэффициенты преобразованного уравнения;
- QQ – дискриминант;
- F – аргумент комплексного корня;
- Re, Im – действительная и мнимая части комплексного корня;
- x1,x2,x3,y1,y2 – корни уравнения.

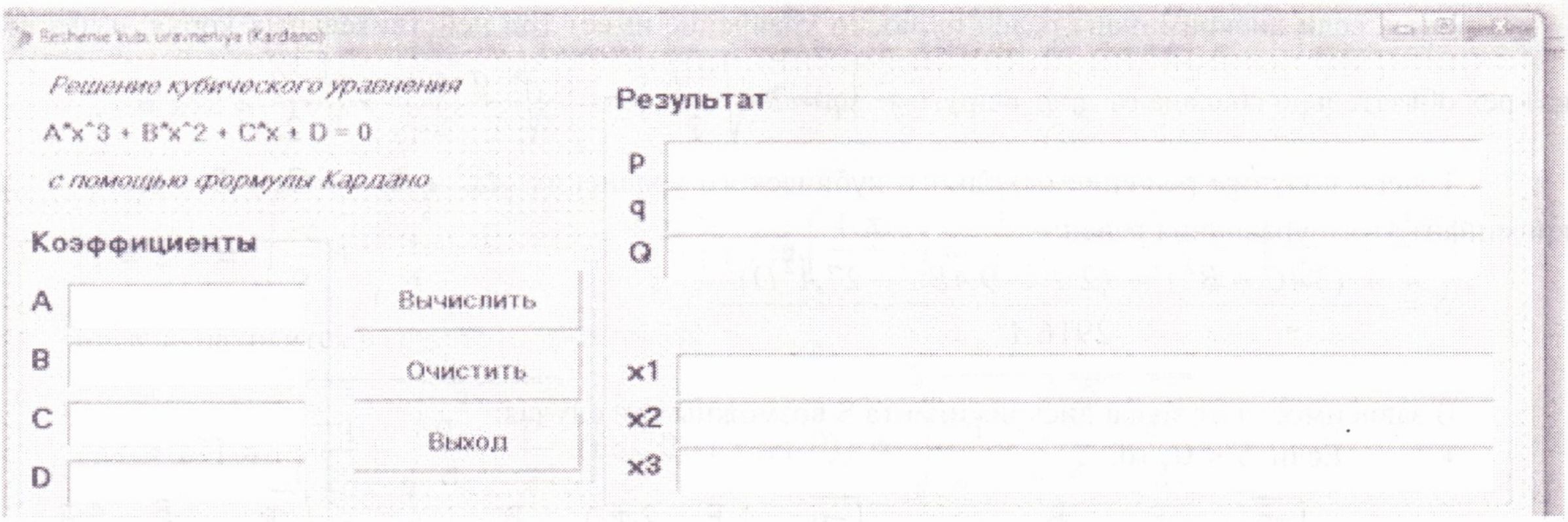

Рис. 1. Интерфейс программы для решения кубических уравнений.

В программе предусмотрен ***контроль корректности ввода данных***:

```
if (edit1.Text='') or (edit2.Text='') or (edit3.Text='') or (edit4.Text='') then
 begin
 Showmessage('Введите все коэффициенты уравнения');
 Clear_Koeffs; Clear_Results;
 end else begin
 A:=strtofloat(edit1.Text); B:=strtofloat(edit2.Text);
 C:=strtofloat(edit3.Text); D:=strtofloat(edit4.Text);
```

Процедуры Clear_Koeffs и Clear_Results осуществляют очистку полей ввода-вывода.

Процедура вычисления коэффициентов и дискриминанта преобразованного уравнения имеет следующий вид:

```
p := (3*A*C-power(B,2))/(3*power(A,2));
q := (2*power(B,3)-9*A*B*C+27*power(A,2)*D)/(27*power(A,3));
QQ := (4*power(3*A*C-power(B,2),3)+(power(2*power(B,3)
 -9*A*B*C+27*power(A,2)*D,2)))/(2916*power(A,6));
edit5.Text := FloatToStr(p); edit6.Text := FloatToStr(q);
edit7.Text := floatToStr(QQ);
```

Вычисление корней уравнения происходит в зависимости от знака дискриминанта:

- Если дискриминант меньше нуля:

```
y1:=0; y2:=0; F:=0;
 if QQ<0 then begin
 if q<0 then F:=Arctan(-2*Sqrt(-QQ)/q);
 if q>0 then F:=Arctan(-2*Sqrt(-QQ)/q)+Pi;
 if q=0 then F:=Pi/2;
 x1:=2*Sqrt(-p/3)*Cos(F/3)-B/A/3;
 x2:=2*Sqrt(-p/3)*Cos((F+2*Pi)/3)-B/A/3;
 x3:=2*Sqrt(-p/3)*Cos((F+4*Pi)/3)-B/A/3;
 if q=0 then x3:=-B/A/3;
 Edit8.Text := FloatToStr(x1); Edit9.Text := FloatToStr(x2);
 Edit10.Text:= FloatToStr(x3);
 end;
```

- Если дискриминант больше нуля:

```
if QQ>0 then begin
 if -q/2+Sqrt(QQ)>0 then y1:=exp(ln(abs(-q/2+Sqrt(QQ)))/3);
 if -q/2+Sqrt(QQ)<0 then y1:=-exp(ln(abs(-q/2+Sqrt(QQ)))/3);
 if -q/2+Sqrt(QQ)=0 then y1:=0;
 if -q/2-Sqrt(QQ)>0 then y2:=exp(ln(abs(-q/2-Sqrt(QQ)))/3);
```

```
 if -q/2-Sqrt(QQ)<0 then y2:=-exp(ln(abs(-q/2-Sqrt(QQ)))/3);
 if -q/2-Sqrt(QQ)=0 then y2:=0;
 x1:=y1+y2-B/A/3; Re:=-(y1+y2)/2-B/A/3; Im:=(y1-y2)*Sqrt(3)/2;
 Edit8.Text := FloatToStr(x1);
 Edit9.Text := FloatToStr(Re)+' + i * '+FloatToStr(Im);
 Edit10.Text:= FloatToStr(Re)+' - i * '+FloatToStr(Im);
end;
```

- Если дискриминант равен нулю:

```
if QQ=0 then begin
 if q<0 then y1:=exp(ln(abs(-q/2))/3);
 if q>0 then y1:=-exp(ln(abs(-q/2))/3);
 if q=0 then y1:=0;
 x1:=2*y1-B/A/3; x2:=-y1-B/A/3; x3:=-y1-B/A/3;
 Edit8.Text := FloatToStr(x1); Edit9.Text := FloatToStr(x2);
 Edit10.Text:= FloatToStr(x3);
end;
```

В программе также организован ***программный контроль ввода коэффициентов***. Для этого создан обработчик события KeyPress для соответствующих элементов типа Edit [6]:

```
if not (Key in ['-', '1'..'9', #8]) then Key := #0.
```

Заключение

В рамках проведенного исследования было рассмотрено несколько способов решения кубических уравнений, в том числе, с использованием формулы Кардано. Были изучены различные нюансы применения этого метода, а также проведено исследование зависимости получаемых результатов от знака кубического дискриминанта. В статье также приведен подробный алгоритм, разработанный авторами статьи, на основе тригонометрической интерпретации формулы Кардано, а также рассмотрены основные процедуры созданного программного обеспечения в объектно-ориентированной среде Delphi.

Существует довольно много проблем в различных научных областях, решение которых сводится к изучению методов решения уравнений третьей и выше степеней. Таким образом, можно сделать вывод, что актуальность проведенного исследования заключается в практическом применении рассмотренных методов, а также созданного программного обеспечения как при изучении некоторых тем математики, физики в школе и ВУЗах, так и при решении прикладных задач из различных областей.

Литература

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – М.: Наука, 1986.
2. Омельченко В.П., Э.В.Курбатова. Математика: учебное пособие. – Ростов н/Д.: Феникс, 2005.
3. Пичурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры. – М.: Просвещение, 1990.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математики для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973.
5. Фленов М.Е. Библия Delphi. – С-Пб: БХВ-Петербург, 2011.
6. Архангельский А.Я. Delphi 7. Справочное пособие. – М.: Бином, 2004.

Поступила в редакцию 07.04.2014 г.