



**ИРОСО**

ИМЕНИ ЗАСЛУЖЕННОГО УЧИТЕЛЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
В.Д. ГУРЕВИЧА

Научно-методический журнал

Издается с 1999 года  
Периодичность: 4 выпуска в год

Scientific and methodological journal

Published since 1999  
Publication frequency: 4 issues per year

# САХАЛИНСКИЙ ГУМАНИТАРНЫЙ ЖУРНАЛ

SAKHALIN HUMANITARIAN JOURNAL

ISSN 1234-5678

№ 4 2023

16+

**Учредитель:**

государственное автономное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Институт развития образования Сахалинской области» имени Заслуженного учителя Российской Федерации В.Д. Гуревича (ул. Пограничная, 42, г. Южно-Сахалинск, Сахалинская обл., 693006).

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций 26.12.2022 г. ПИ № ФС77-84407.

**Перепечатка материалов, опубликованных в журнале, допускается только с разрешения редакции.**

**Редакция может не разделять мнения авторов статей.**

Журнал включен в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и представлен в Научной электронной библиотеке.

ISSN 2949-5253

С электронной версией журнала можно ознакомиться на сайте <https://iroso.sakhalin.gov.ru/> в разделе «Издательство».

Цена свободная.

**Главный редактор**

**Т.Г. Харитоновна**, канд. филос. наук, проректор по научно-методической работе ИРОСО им. Заслуженного учителя РФ В.Д. Гуревича (г. Южно-Сахалинск)

**Редактор**

**В.А. Яковлева**, редактор издательства

**Члены редакционной коллегии**

**И.А. Агеев**, канд. ист. наук, Национальный исследовательский Томский политехнический университет (г. Томск)

**Е.Л. Афанасенкова**, канд. психол. наук, доцент, ИРОСО им. Заслуженного учителя РФ В.Д. Гуревича (г. Южно-Сахалинск)

**Л.Н. Гринько**, канд. филол. наук, Центр саморазвития «Страна СОВ» (г. Южно-Сахалинск)

**Е.А. Иконникова**, доктор филол. наук, профессор, Сахалинский государственный университет (г. Южно-Сахалинск)

**Е.Б. Лукиева**, канд. ист. наук, доцент, Национальный исследовательский Томский политехнический университет (г. Томск)

**А.Р. Садоква**, доктор филол. наук, профессор, Институт стран Азии и Африки МГУ им. М.В. Ломоносова (г. Москва)

**Л.Ю. Саркисян**, канд. экон. наук, доцент, Сахалинский государственный университет (г. Южно-Сахалинск)

**А.В. Смолина**, канд. пед. наук, доцент, Сахалинский государственный университет (г. Южно-Сахалинск)

**А.А. Шавлохова**, канд. филос. наук, Национальный исследовательский Томский политехнический университет (г. Томск)

**Founder:**

State Autonomous Educational Institution of Additional Professional Education «Institute for the Development of Education of the Sakhalin Region» named after the Honored Teacher of the Russian Federation V.D. Gurevich (42, Pogranichnaya str., Yuzhno-Sakhalinsk, Sakhalin Region, 693006).

The journal was registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Communications on 12/26/2022. PI No. FS77-84407.

**Reprint of materials published in the journal is allowed only with the permission of the editorial board.**

**The editors may not share the opinions of the authors of the articles.**

The journal is included in the Russian Science Citation Index (RSCI) and is presented in the Scientific Electronic Library.

ISSN 2949-5253

The electronic version of the journal can be found on the website <https://iroso.sakhalin.gov.ru/> in the «Publishing House» section.

The price is free.

**Editor-in-Chief**

**T.G. Kharitonova**, Candidate of Philos. of Sciences, Vice-rector for Scientific and methodological work of the IDESR named after the Honored Teacher of the Russian Federation V.D. Gurevich (Yuzhno-Sakhalinsk)

**Editor**

**V.A. Yakovleva**, editor of the publishing house

**Members of the Editorial Board**

**I.A. Ageev**, Candidate of Sciences in History, National Research Tomsk Polytechnic University (Tomsk)

**E.L. Afanasenkova**, Candidate of Sciences in Psychology, Associate Professor, IDESR named after Honored Teacher of the Russian Federation V.D. Gurevich (Yuzhno-Sakhalinsk)

**L.N. Grinko**, Candidate of Sciences in Philology, Self-development center «The Land of Owls» (Yuzhno-Sakhalinsk)

**E.A. Ikonnikova**, Doctor of Sciences in Philology, Professor, Sakhalin State University (Yuzhno-Sakhalinsk)

**E.B. Lukieva**, Candidate of Sciences in History, Associate Professor, National Research Tomsk Polytechnic University (Tomsk)

**A.R. Sadokova**, Doctor of Sciences in Philology, Professor, Institute of Asian and African Studies, Lomonosov Moscow State University (Moscow)

**L.Y. Sarkisyan**, Candidate of Sciences in Economics, Associate Professor, Sakhalin State University (Yuzhno-Sakhalinsk)

**A.V. Smolina**, Candidate of Sciences in Pedagogy, Associate Professor, Sakhalin State University (Yuzhno-Sakhalinsk)

**A.A. Shavlokhova**, Candidate of Sciences in Philosophy, National Research Tomsk Polytechnic University (Tomsk)

Формат А4. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 6,98. Тираж 300 экз. Заказ № 123.

Подписано в печать 28.12.2023 г.  
Дата выхода в свет: 29.12.2023 г.

Директор В. Герасимов. Технический редактор Е. Фадеева.  
Корректор Е. Ким.

Адрес редакции и издателя:  
693006, г. Южно-Сахалинск, ул. Пограничная, 42.  
Тел. 300-298. Эл. почта: [irosotext@yandex.ru](mailto:irosotext@yandex.ru)

Адрес типографии:  
693006, г. Южно-Сахалинск, ул. Пограничная, 42.  
Тел. 300-298. Эл. почта: [irosotext@yandex.ru](mailto:irosotext@yandex.ru)

A4 format. Digital printing.  
Con. pr. sh. 6,98. Edition of 300 copies. Order No. 123.

Signed to the press 28.12.2023.  
Date of publication: 29.12.2023.

Director V. Gerasimov. Technical editor E. Fadeeva.  
Proofreader E. Kim.

The address of the editorial office, publisher:  
693006, Yuzhno-Sakhalinsk, Pogranichnaya str., 42.  
Tel. 300-298. E-mail: [irosotext@yandex.ru](mailto:irosotext@yandex.ru)

Address of the printing house:  
693006, Yuzhno-Sakhalinsk, Pogranichnaya str., 42.  
Tel. 300-298. E-mail: [irosotext@yandex.ru](mailto:irosotext@yandex.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

### НОВОСТИ НАУКИ

Конференции .....	6
Диссертационные советы .....	8

### ОБРАЗОВАНИЕ – ВЫЗОВЫ СОВРЕМЕННОСТИ

#### Е.А.Машенко

Воспитание осознанной слушательской культуры обучающихся посредством посещения концертов .....	13
--	----

#### Е.А. Нестёркина

Особенности организации подвижной игры с детьми-мигрантами старшего дошкольного возраста .....	19
--	----

#### К.Т. Пелина

Метапредметная направленность уроков технологии в пятом классе .....	23
--	----

#### М.Н. Симакова

Применение информационно-коммуникационных технологий в геометрических и физических приложениях определенного интеграла.....	28
---	----

### ВОПРОСЫ ПСИХОЛОГИЧЕСКОЙ НАУКИ

#### Т.В. Ковальская, О.В. Пасынкова

Психологическое сопровождение детей с особыми образовательными потребностями с применением дистанционных образовательных технологий.....	37
--	----

#### Р.А. Кутбиддинова

Методы арт-терапии в работе с несовершеннолетними иностранными гражданами как детьми с особыми образовательными потребностями по снижению тревожности .....	45
---	----

### ИСТОРИЧЕСКОЕ КРАЕВЕДЕНИЕ

#### К.В. Гольшева, В.Д. Мезенцева

Преимущества использования напольных карт для интерактивных занятий по географическому краеведению .....	50
--	----

#### Е.В. Сверкунова

О разработке учебных пособий для преподавания родного языка в Сахалинской области .....	56
---	----

Требования к статьям, направляемым для публикации в «Сахалинском гуманитарном журнале» .....	60
--	----

**ОБРАЗОВАНИЕ – ВЫЗОВЫ СОВРЕМЕННОСТИ**

Научная статья  
УДК 519.85(045)

**ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ  
ПРИЛОЖЕНИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА**

**Марина Николаевна Симакова**

Лицей № 1, г. Южно-Сахалинск, Сахалинская область, Россия, msimdisk@yandex.ru

**Аннотация:** статья посвящена изучению методов вычисления определенных интегралов по формулам математики и с применением программирования на языке Python, а также реализации алгоритмов вычисления площади поверхности и объема тела вращения в САПР Mathcad с последующей сравнительной характеристикой рассмотренных методов.

**Ключевые слова:** криволинейная трапеция, численные методы, математическое моделирование, САПР Mathcad

**Для цитирования:** Симакова, М.Н. Применение информационно-коммуникационных технологий в геометрических и физических приложениях определенного интеграла / М.Н. Симакова // Сахалинский гуманитарный журнал. – 2023. – № 4. – С. 28–36.

**EDUCATION – CHALLENGES OF OUR TIME**

Original article

**THE USE OF INFORMATION AND COMMUNICATION  
TECHNOLOGIES IN GEOMETRIC AND PHYSICAL APPLICATIONS  
OF A CERTAIN INTEGRAL**

**Marina Nikolaevna Simakova**

Lyceum No. 1, Yuzhno-Sakhalinsk, Sakhalin oblast, Russia, msimdisk@yandex.ru

**Abstract:** the article is devoted to the study of methods for calculating certain integrals using mathematical formulas and using Python programming, as well as the implementation of algorithms for calculating the surface area and volume of the body of rotation in Mathcad CAD with subsequent comparative characteristics of the methods considered.

**Key words:** curved trapezoid, numerical methods, mathematical modeling, CAD Mathcad

**For citation:** Simakova, M.N. Application of information and communication technologies in geometric and physical applications of a certain integral / M.N. Simakova // Sakhalin Humanitarian Journal. – 2023. – No. 4. – Pp. 28–36.

**Введение**

Математические знания и навыки необходимы практически во всех профессиях, связанных с естественными науками, а именно с физикой и информатикой. Любой инженер должен владеть большим объемом математических знаний и уметь применять их на практике. Приложения определенного интеграла, рассмотренные в данной работе, являются лишь малой частью этих знаний, но дают представление о математической науке.

Актуальность выбранной темы связана с информатизацией процесса обучения. Без математической грамотности невозможно успешное освоение информатики. Интересным представляется аспект применения информационных технологий к решению прикладных задач по математике.

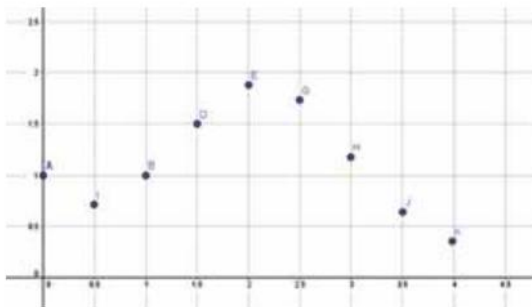
Цель исследования: изучить методы вычисления определенного интеграла, а также его приложения. Реализовать рассмотренные методы с помощью программирования и в САПР Mathcad.

## Применение ИКТ в геометрических и физических приложениях

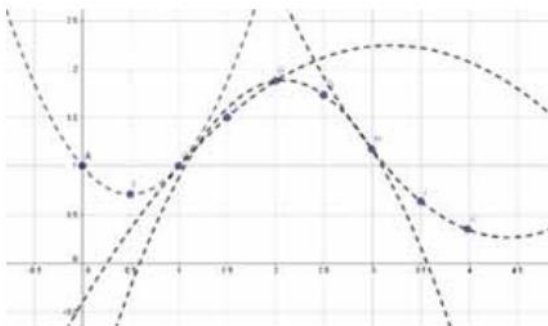
### Вычисление определенного интеграла таблично заданной функции в среде программирования Python IDLE

Приведем пример реализации численного интегрирования методом Симпсона. На вход алгоритму подается набор точек, по которым требуется найти приближенное значение интеграла неизвестной функции. На выходе алгоритм выдает найденное приближенное значение интеграла. В данном методе на каждом отрезке функция приближается параболой.

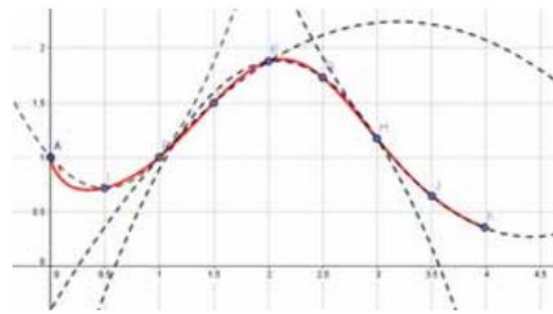
1. Пусть была задана функция  $f(x) = x^{\sin(x)}$  на интервале от 0 до 4, требуется найти значение определенного интеграла  $\int_0^4 x^{\sin(x)} dx$ . Даны только точки, принадлежащие графику функции:



2. В таком случае через каждые тройки точек можно провести график какой-либо параболы  $ax^2 + bx + c$ :



3. Если построить график функции  $f(x) = x^{\sin(x)}$  (выделен красной линией), то можно заметить, что параболы довольно точно описывают этот график (при достаточно большом числе разбиений):



4. Значит, значение определенного интеграла складывается из значений определенного интеграла каждой из парабол на соответствующих интервалах.

Реализуем данный метод в среде программирования Python IDLE.

Формула для вычисления определенного интеграла  $S = \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx$  была выведена при рассмотрении метода парабол:

$$S = \frac{2}{3} h^3 \cdot \frac{1}{2h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) + 2h \cdot y_1 = \frac{h}{3} (y_0 - 2y_1 + y_2) + 2hy_1 = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

1. Вводим количество точек  $k$  и создаем список (массив) для хранения координат точек. Изначально приближенное значение интеграла равно 0:

```
integral = 0.0
k = int(input('Количество точек: '))
A = []
```

2. Вводим координаты  $(x, y)$  для каждой точки:

```
print('Введите координаты точек ')
for i in range(k):
    print('Координаты точки', i+1, ': ', end='')
    A.append(list(map(float, input().split())))
```

3. Для троек соседних точек считаем площадь под графиком параболы, которую они образуют, по формулам, выведенным при рассмотрении метода парабол. В этом случае указатель  $i$  на каждой итерации сдвигается на 2 ед.

```
for i in range(2, k, 2):
    h = (A[i][0] - A[i-2][0]) / 2
    integral += (A[i-2][1] + 4 * A[i-1][1] + A[i][1]) * h
integral /= 3.0
```

4. Осуществляем вывод полученного результата. Для задержки окна консоли после завершения работы программы используем функцию `system('pause')` из модуля `os`:

```
print('-----')
print('S =', integral)
system('pause')
```

### Понятие численного интегрирования

Под численным интегрированием понимают набор численных методов для нахождения значения определенного интеграла. Оно применяется, когда: 1) подынтегральная функция не задана аналитически. Например, представлена в виде таблицы значений в узлах некоторой расчетной сетки; 2) аналитическое представление подынтегральной функции известно, но ее первообразная не выражается через аналитические функции.

В этих двух случаях невозможно вычисление интеграла по формуле Ньютона-Лейбница. Возможна ситуация, когда вид первообразной очень сложен, и быстрее вычислить значение интеграла численным методом. Основная идея большинства методов численного интегрирования состоит в замене подынтегральной функции на более простую, интеграл от которой легко вычисляется аналитически. При замене подынтегральной функции на полином нулевой, первой, второй степени получают методы прямоугольников, трапеций и парабол (Симпсона). Часто формулы для оценки значения интеграла называют квадратурными формулами.

Существуют два способа приближенного вычисления интегралов.

1. *Способ трапеций.* Промежуток интегрирования  $[a, b]$  разбивают на  $n$  равных частей точками  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ . Площадь каждой криволинейной трапеции между прямыми  $x = x_{i-1}$  и  $x = x_i$  заменяют площадью прямолинейной трапеции, ограниченной сверху хордой, соединяющей точки графика с абсциссами  $x_{i-1}$  и  $x_i$ . Основаниями таких трапеций являются  $y_{i-1} = f(x_{i-1})$  и  $y_i = f(x_i)$ .

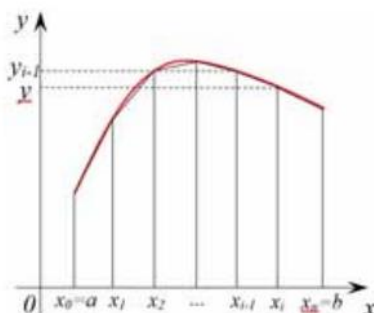


Рис. 1 / Fig. 1

Сумма площадей таких трапеций равна:

$$S_{\text{тр}} = \frac{b-a}{n} \left[ \frac{y_0+y_1}{2} + \frac{y_1+y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2} \right] = \frac{b-a}{n} \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right).$$

Абсолютная погрешность  $R_n$  приближения, полученного по формуле трапеций, оценивается по формуле:

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2, \text{ где } M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

Для линейной функции  $y = kx + b$  формула трапеций будет точной.

2. *Способ средних прямоугольников.* В качестве приближения к интегралу выступает интегральная сумма. Значения подынтегральной функции берутся в серединах промежутков, разделяющих промежуток интегрирования. Пусть все промежутки имеют одинаковую длину  $\frac{b-a}{n}$ , где  $a$  и  $b$  – пределы интегрирования,  $n$  – количество. Интегральная сумма  $S_{\text{пр}} = \frac{b-a}{n} \left[ f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) \right] = \frac{b-a}{n} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_n)$ , где  $\bar{y}_i = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$  (рис. 2).

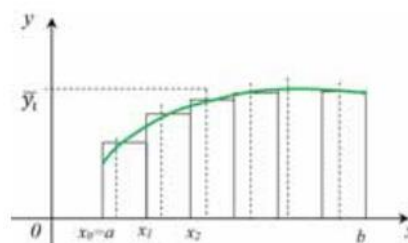


Рис. 2 / Fig. 2

$\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$  находится посередине между  $x = x_{i-1}$  и  $x = x_i$ , проходящими через концы интервала  $[x_{i-1}, x_i]$ . Тогда площадь прямоугольника равна площади трапеции, ограниченной промежутком  $[x_{i-1}, x_i]$ , прямыми  $x = x_{i-1}$  и  $x = x_i$  и касательной к графику  $f(x)$  в точке с абсциссой  $\bar{x}_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$  (рис. 3).

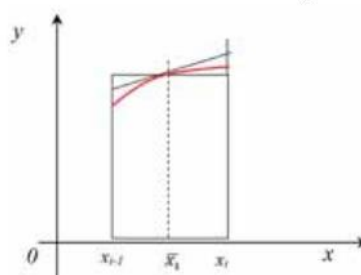


Рис. 3 / Fig. 3

Абсолютная погрешность  $R_n$  приближения, полученного по формуле средних прямоугольников, оценивается с помощью формулы:

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot M_2,$$

где  $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ .  $|R_n| = \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \right|$ .

Для линейной функции  $y = kx + b$  формула средних прямоугольников точная.

**Метод парабол. Вывод формулы Симпсона.** Если заменить график функции  $y = f(x)$  на каждом отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  разбиения не отрезками прямых, как в методах трапеций и средних прямоугольников, а дугами парабол, то получим более точную формулу приближенного вычисления интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ . Найдем площадь  $S$  криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой  $y = ax^2 + bx + c$ , сбоку – прямыми  $x = -h, x = h$  и снизу отрезком  $[-h; h]$ . Пусть парабола проходит через три точки  $M_1(-h; y_0), M_2(0; y_1), M_3(h; y_2)$ , где  $y_0 = ah^2 - bh + c$  – ордината в точке  $x = -h$ ,  $y_1 = c$  – ордината в точке  $x = 0$ ;  $y_2 = ah^2 + bh + c$  – ордината параболы при  $x = h$  (рис. 4).

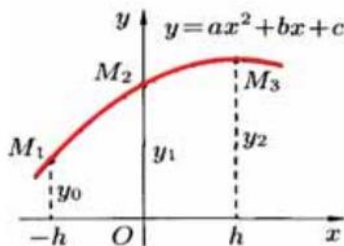


Рис. 4 / Fig. 4

Площадь:

$$S = \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \left( a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \right) \Big|_{-h}^h = \frac{2}{3} ah^2 + 2ch.$$

Выразим площадь через  $h, y_0, y_1, y_2$ . Из равенства для  $y_i$  находим, что  $c = y_1, a = \frac{1}{2h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2)$ . Подставим зна-

чения  $c$  и  $a$  в предыдущее равенство:

$$S = \frac{2}{3} h^3 \cdot \frac{1}{2h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) + 2h \cdot y_1 = \frac{h}{3} (y_0 - 2y_1 + y_2) + 2hy_1 = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Получим формулу парабол для вычисления интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ . Отрезок  $[a, b]$  разобьем на  $2n$  равных частей длиной  $h = \frac{b-a}{2n}$  точками  $x_i = x_0 + ih$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 2n$ ). В точках деления  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} = b$  вычисляем значения подынтегральной функции  $f(x)$ :  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$ , где  $y_i = f(x_i)$ .

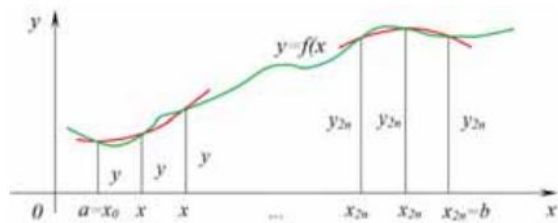


Рис. 5 / Fig. 5

Заменяем каждую пару соседних элементарных криволинейных трапеций с основаниями, равными  $h$ , одной элементарной параболической трапецией с основанием, равным  $2h$ . На отрезке  $[x_0, x_2]$  парабола проходит через три точки  $(x_0; y_0), (x_1; y_1), (x_2; y_2)$ . Используя выведенную выше формулу, находим:

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

$$S_2 = \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx = \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4),$$

...

$$S_n = \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx = \frac{h}{3} (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Сложим равенства:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

или

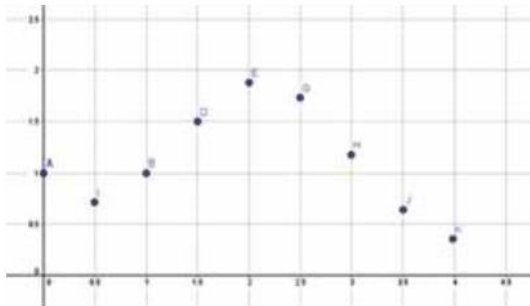
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} ((y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + 2y_{2n-2})).$$

## Применение ИКТ в геометрических и физических приложениях

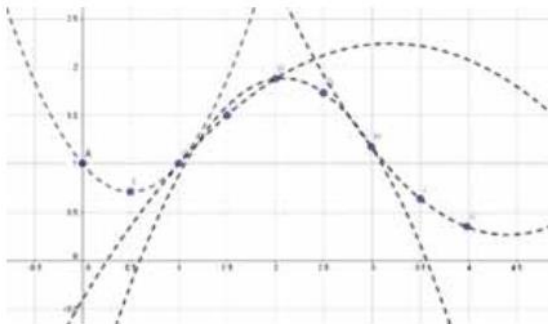
### Вычисление определенного интеграла таблично заданной функции в среде программирования Python IDLE

Приведем пример реализации численного интегрирования методом Симпсона. На вход алгоритму подается набор точек, по которым требуется найти приближенное значение интеграла неизвестной функции. На выходе алгоритм выдает найденное приближенное значение интеграла. В данном методе на каждом отрезке функция приближается параболой.

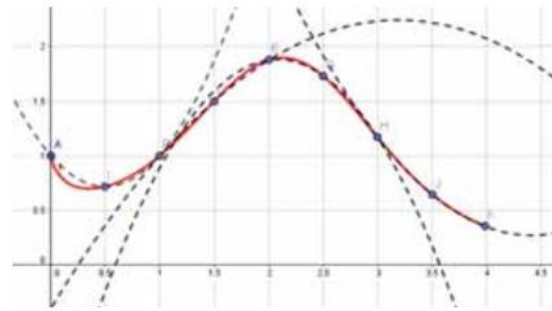
1. Пусть была задана функция  $f(x) = x^{\sin(x)}$  на интервале от 0 до 4, требуется найти значение определенного интеграла  $\int_0^4 x^{\sin(x)} dx$ . Даны только точки, принадлежащие графику функции:



2. В таком случае через каждые тройки точек можно провести график какой-либо параболы  $ax^2 + bx + c$ :



3. Если построить график функции  $f(x) = x^{\sin(x)}$  (выделен красной линией), то можно заметить, что параболы довольно точно описывают этот график (при достаточно большом числе разбиений):



4. Значит, значение определенного интеграла складывается из значений определенного интеграла каждой из парабол на соответствующих интервалах.

Реализуем данный метод в среде программирования Python IDLE.

Формула для вычисления определенного интеграла  $S = \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx$  была выведена при рассмотрении метода парабол:

$$S = \frac{2}{3} h^3 \cdot \frac{1}{2h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) + 2h \cdot y_1 = \frac{h}{3} (y_0 - 2y_1 + y_2) + 2hy_1 = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

1. Вводим количество точек  $k$  и создаем список (массив) для хранения координат точек. Изначально приближенное значение интеграла равно 0:

```
integral = 0.0
k = int(input('Количество точек: '))
A = []
```

2. Вводим координаты  $(x, y)$  для каждой точки:

```
print('Введите координаты точек ')
for i in range(k):
    print('Координаты точки', i+1, ': ', end='')
    A.append(list(map(float, input().split())))
```

3. Для троек соседних точек считаем площадь под графиком параболы, которую они образуют, по формулам, выведенным при рассмотрении метода парабол. В этом случае указатель  $i$  на каждой итерации сдвигается на 2 ед.

```
for i in range(2, k, 2):
    h = (A[i][0] - A[i-2][0]) / 2
    integral += (A[i-2][1] + 4 * A[i-1][1] + A[i][1]) * h
integral /= 3.0
```

4. Осуществляем вывод полученного результата. Для задержки окна консоли после завершения работы программы используем функцию `system('pause')` из модуля `os`:

```
print('-----')
print('S = ', integral)
system('pause')
```



Результат работы программы для случая, разобранныго в примере:

```

C:\WINDOWS\system
Количество точек: 9
Введите координаты точек
Координаты точки 1 : 0 1
Координаты точки 2 : 0.5 0.72
Координаты точки 3 : 1 1
Координаты точки 4 : 1.5 1.5
Координаты точки 5 : 2 1.88
Координаты точки 6 : 2.5 1.73
Координаты точки 7 : 3 1.17
Координаты точки 8 : 3.5 0.64
Координаты точки 9 : 4 0.36
-----
S = 4.636666666666666
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .

```

Точное значение интеграла  $\int_0^4 x^{\sin(x)} dx = 4.614085\dots$

### Реализация алгоритма вычисления площади поверхности и объема тела вращения в САПР Mathcad

Для начала следует вывести формулы, позволяющие находить площадь боковой поверхности и объем тела вращения. Пусть  $y = f(x)$  – непрерывная неотрицательная функция, заданная на интервале  $[a, b]$ . Представим тело, получающееся при вращении вокруг оси  $OX$  криволинейной трапеции, ограниченной функцией  $y = f(x)$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и осью  $OX$  (рис. 6).

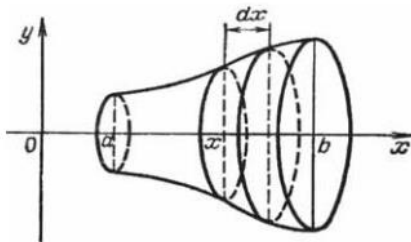


Рис. 6 / Fig. 6

Для вычисления объема тела рассмотрим тело с переменной правой стенкой, пересекающей ось  $OX$  в точке  $x$ . Объем этого тела  $V(x)$  есть функция от  $x$ . При бесконечно малом приращении  $dx$  объем возрастает на объем бесконечно тонкого слоя  $dx$  с площадью основания  $\pi f^2(x)$ . Тогда  $dV(x) = \pi f^2(x) dx$  и  $V(x) = \int \pi f^2(x) dx = F_0(x) + C$ , где  $F_0(x)$  – первообразная функция для  $\pi f^2(x) dx$ . При  $x = a$  получим  $0 = F_0(a) = F_0(a) + C$ , откуда  $C = -F_0(a)$ , объем  $V(x) = F_0(x) - F_0(a)$  и искомый объем:  $V = V(b) = F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b \pi y^2 dx$ .

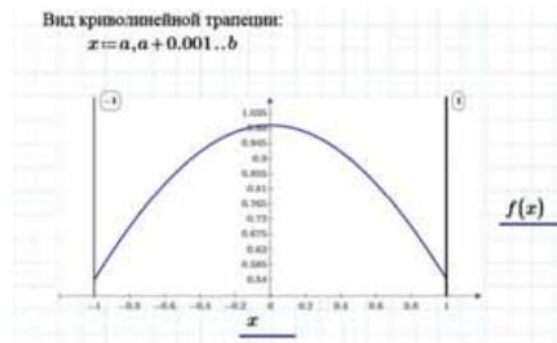
32

Далее найдем площадь боковой поверхности тела. Введем в рассмотрение площадь  $S(x)$  такого же тела, но с ограниченно переменной правой стенкой, пересекающей ось  $OX$  в точке с абсциссой  $x$ . При бесконечно малом приращении  $dx$  главной частью приращения  $\Delta P(x)$  будет площадь ленты длиной  $2\pi y$  и шириной  $dl$ .  $dP(x) = 2\pi y dl$  и:  $S = \int_a^b 2\pi y dl = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx$ . Для вычисления в САПР Mathcad: задаем функцию  $y = f(x)$ , и интервал  $[a, b]$ .

$$f(x) := \cos(x) \quad a := -1 \quad b := 1$$

Далее представляем вид криволинейной трапеции:

1. Строим график функции  $y = f(x)$ .
2. Добавляем вертикальные маркеры и записываем в них значения  $a$  и  $b$ , они представляют собой прямые  $x = a$ ,  $x = b$ .



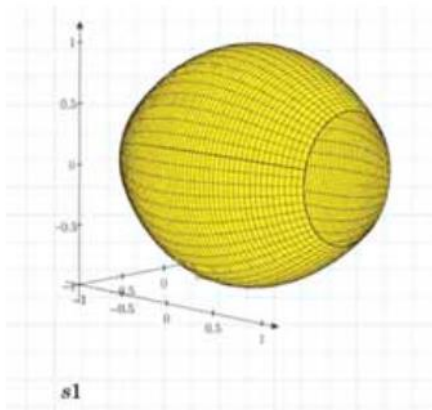
Изучим тело, полученное вращением криволинейной трапеции вокруг оси  $OX$ . Для этого используем цилиндрические системы координат. Цилиндрической системой координат называют трехмерную систему координат, являющуюся расширением полярной системы координат путем добавления третьей координаты, которая задает высоту точки над плоскостью. Любая точка  $P$  будет задаваться как  $(\rho, \varphi, z)$ .  $\rho \geq 0$  – расстояние от  $P$  до оси  $Z$ ,  $0 \leq \varphi \leq 360^\circ$  – угол между осью  $X$  и отрезком  $OP'$ , где  $P'$  – проекция точки  $P$  на плоскость  $XOY$ ,  $z$  – аппликата точки  $P$ . Для построения тела вращения будем использовать параметрические уравнения перехода к цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned}
 x1(x, fi) &:= x \\
 y1(x, fi) &:= f(x) \cdot \cos(fi) \\
 z1(x, fi) &:= f(x) \cdot \sin(fi)
 \end{aligned}$$

Далее построим поверхность тела вращения, используя функцию *CreateMesh*:

```
s1 := CreateMesh(x1, y1, z1, a, b, 0, 2 π, 50)
```

$x1, y1, z1$  – матрицы значений для каждой координаты,  $a$  – нижняя граница значений переменной  $x$ ,  $b$  – верхняя граница значений переменной  $x$ ;  $0$  и  $2\pi$  – верхняя и нижняя границы угла поворота точки графика; 50 – количество линий в сетке графика. Вид полученного 3D-графика:



Для вычисления объема тела вращения используем формулу  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ , значение данного интеграла вычисляем по формуле Симпсона.

1. Задаем четное число разбиений. И вычисляем длину отрезка разбиения:

```
Вычисление объема с применением формулы Симпсона:
n := 200
h := (b - a) / n = 0.01
```

2. Для вычисления значения определенного интеграла используем операторы программирования. Пусть  $xi = x_1$ , вычисляем значение  $sum1 = y_1 + y_{2n}$ :

```
V := || xi ← a + h
      sum1 ← π · (f(a))2 + π · (f(b))2
```

С помощью цикла *while* вычисляем значение  $sum2 = y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}$ :

```
|| while xi ≤ b - h
   || sum2 ← sum2 + π · (f(xi))2
   || xi ← xi + 2 h
```

Теперь  $xi$  присваиваем значение  $x_2$  и вычисляем  $sum3 = y_2 + y_4 + \dots + y_n$ :

```
xi ← a + 2 h
while xi ≤ (b - 2 h)
  sum3 ← sum3 + π · (f(xi))2
  xi ← xi + 2 h
```

Последним шагом переменной *Vol* присваиваем значение определенного интеграла, вычисленное согласно формуле Симпсона:

```
|| Vol ← h / 3 (sum1 + 4 sum2 + 2 sum3)
|| Vol
```

3. Записываем ответ: **Ответ:  $V = 4.551$**

4. Для нахождения площади боковой поверхности используем тот же алгоритм, но сначала требуется найти производную функции, так как для формулы  $S = \int_a^b 2\pi y dl = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx$  требуется значение производной:

Вычисление площади боковой поверхности:

$$g(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow -\sin(x)$$

Далее программа аналогична.

5. Вычислим точное значение интегралов  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$  и  $S = \int_a^b 2\pi y dl = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx$ , чтобы оценить погрешность полученного значения, вычисленного по формуле Симпсона. При увеличении числа разбиений будет получаться значение, более близкое к точному значению интеграла:

```
Ответ: V = 4.551
Точное значение V = π ∫ (f(x))2 dx = 4.57

Ответ: S = 11.625
Точное значение S = 2 π ∫ f(x) · √(1 + (g(x))2) dx = 11.715
```

**Реализация вычисления статических моментов и координат центра тяжести плоских кривых и фигур в САПР Mathcad**

1. Определим формулы, по которым можно вычислить координату центра тяжести плоской кривой. Пусть на плоскости  $Oxy$  задана система материальных точек  $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \dots, M_n(x_n; y_n)$  с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Статическим моментом  $S_x$  системы

материальных точек относительно оси  $Ox$  называется сумма произведений масс точек на их ординаты (расстояния точек от оси  $Ox$ ):  $S_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i$ . Аналогично определяется статистический момент  $S_y$  системы относительно оси  $Oy$ :  $S_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$ . Если массы распределены непрерывным образом вдоль некоторой кривой, то для выражения статистического момента нужно интегрирование. Пусть  $y = f(x) (a \leq x \leq b)$  – это уравнение однородной материальной кривой АВ с постоянной линейной плотностью  $\gamma (\gamma = Const)$ . Для произвольного  $x \in [a, b]$  на кривой АВ есть точка с координатами  $(x; y)$ . Выделим на кривой элементарный участок длины  $dl$ , содержащий эту точку. Тогда масса этого участка  $\gamma dl$ . Примем этот участок  $dl$  приближенно за точку, отстоящую от оси  $Ox$  на расстоянии  $y$ . Тогда дифференциал статистического момента  $dS_x = \gamma dl \cdot y$  (рис. 7).

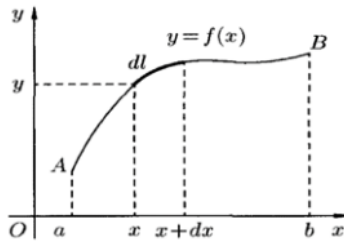


Рис. 7 / Fig. 7

Отсюда следует, что статический момент  $S_x$  кривой АВ относительно оси  $Ox$  равен:

$$S_x = \gamma \int_a^b y dl = \gamma \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

$$\text{При этом } S_y: S_y = \gamma \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

Статические моменты  $S_x$  и  $S_y$  кривой позволяют установить положение ее центра тяжести (центра масс). Центром тяжести материальной плоской кривой  $y = f(x), x \in [a, b]$  называется точка плоскости, обладающая свойством: если в ней сосредоточить всю массу  $m$  заданной кривой, то статистический момент точки относительно любой координатной оси равен статистическому моменту всей кривой  $y = f(x)$  относительно той же оси. Обозначим  $C(x_c; y_c)$  центр тяжести кривой АВ. Из определения центра тяжести следуют равенства  $m \cdot x_c = S_y$  и  $m \cdot y_c = S_x$  или  $\gamma l \cdot x_c = S_y$  и  $\gamma l \cdot y_c = S_x$ .

То есть  $x_c = \frac{S_y}{\gamma l}$ ,  $y_c = \frac{S_x}{\gamma l}$  или:

$$x_c = \frac{\int_a^b x dl}{l} = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx};$$

$$y_c = \frac{\int_a^b y dl}{l} = \frac{\int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx}.$$

2. Определим формулы для вычисления статистических моментов и координат центра тяжести плоской фигуры. Пусть дана материальная плоская фигура (пластинка), ограниченная кривой  $y = f(x) \geq 0$  и прямыми  $y = 0, x = a, x = b$ .

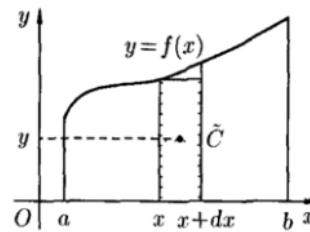


Рис. 8 / Fig. 8

Считаем, что поверхностная плотность пластинки постоянна ( $\gamma = Const$ ) (рис. 8). Тогда масса всей пластинки равна  $\gamma \cdot S$ , то есть  $m = \gamma \int_a^b f(x) dx$ . Выделим элементарный участок пластинки в виде бесконечно узкой вертикальной полосы и будем приближенно считать его прямоугольником. Тогда его масса равна  $\gamma \cdot y dx$ . Центр тяжести  $\tilde{C}$  прямоугольника лежит на пересечении его диагоналей. Точка  $\tilde{C}$  отстоит от оси  $Ox$  на  $\frac{1}{2}y$ , а от оси  $Oy$  на  $x$  (точнее, на  $x + \frac{1}{2}\Delta x$ ). Для статистических моментов относительно осей выполняются соотношения:

$$dS_x = \gamma \cdot y dx \cdot \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\gamma \cdot y^2 dx \quad dS_y =$$

$$\gamma \cdot y dx \cdot x = \gamma xy dx. \quad S_x =$$

$$\frac{1}{2}\gamma \int_a^b y^2 dx, \quad S_y \gamma \int_a^b xy dx.$$

По аналогии с плоской кривой получаем, обозначив координаты центра тяжести плоской фигуры (пластинки) через  $C(x_c; y_c)$ , что  $m \cdot x_c = S_y$  и  $m \cdot y_c = S_x$ . Отсюда:

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{S_y}{\gamma S} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{S_x}{\gamma S}$$

или

$$x_c = \frac{\int_a^b xy \, dx}{\int_a^b y \, dx}, y_c = \frac{\int_a^b y^2 \, dx}{2 \int_a^b y \, dx}.$$

Перейдем к реализации данных методов в САПР Mathcad.

1. Задаем кривую и интервал, на котором она рассматривается:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Плоская кривая: } f(x) &::= x^{3 \cos(x)} \\ a &::= 0 \\ b &::= 5 \end{aligned}$$

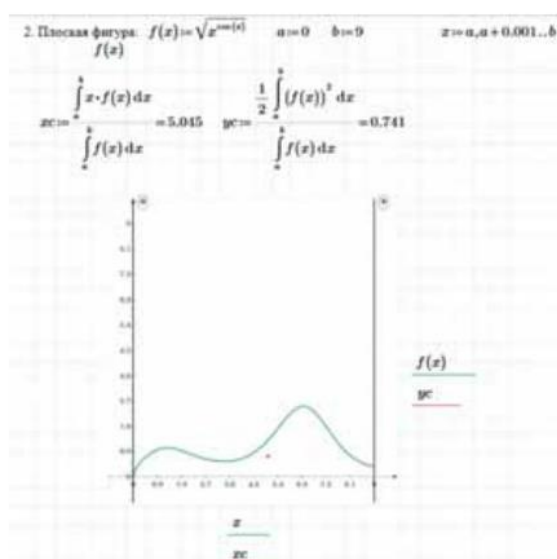
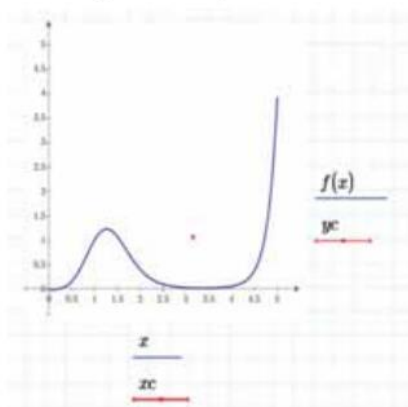
2. Находим производную функции:

$$g(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 3 \cdot x^{3 \cos(x)-1} \cdot \cos(x) - 3 \cdot x^{3 \cos(x)} \cdot \ln(x) \cdot \sin(x)$$

3. По формулам находим координаты центра тяжести плоской кривой:

$$x_c := \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1+(g(x))^2} \, dx}{\int_a^b \sqrt{1+(g(x))^2} \, dx} = 3.156 \quad y_c := \frac{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+(g(x))^2} \, dx}{\int_a^b \sqrt{1+(g(x))^2} \, dx} = 1.073$$

4. Результат представляем в виде графика (точка – центр тяжести).



## Заключение

Рассмотренные в работе методы приближенного вычисления интеграла позволяют вычислять его значения, если подынтегральная функция задана в виде массива значений, или же подынтегральная функция настолько сложна, что вычисление ее первообразной является довольно трудоемким процессом. Наиболее точным методом является формула Симпсона. Применение ИКТ позволяет с большой точностью вычислять значения интегралов рассмотренными способами, благодаря возможности большого числа разбиений отрезка интегрирования функции. Рассмотренные методы можно использовать при решении геометрических и физических задач.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Энциклопедия для детей. – Том 11: Математика / главный редактор М.Д. Аксенова. – Москва : Аванта+, 2002. – 688 с.
2. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа : учебник. 11 класс / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 2-е изд., стер. – Москва : Мнемозина, 2020. – 311 с.
3. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 9-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
4. Фадеев, Д.К. Элементы высшей математики для школьников / Д.К. Фадеев, М.С. Никулин, И.Ф. Соколовский. – Москва : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1987. – 336 с.
5. Портал «Wikipedia» // Формула Симпсона : статья. – URL : [https://ru.wikipedia.org/wiki/Формула\\_Симпсона](https://ru.wikipedia.org/wiki/Формула_Симпсона) (дата обращения: 23.10.2023).
6. Тишин, В.И. Информатика и математика: в 3-х частях / В.И. Тишин. – Москва : Бином. Лаборатория знаний, 2019. – 240 с. (часть 1), 112 с. (часть 2), 364 с. (часть 3).

7. Старцева, Н.А. Информационные технологии на уроках математики / Н.А. Старцева. – Москва : Институт электронных программно-методических средств обучения РАО, 2010. – 150 с.
8. Сулейманов, Р.Р. Компьютерное моделирование математических задач / Р.Р. Сулейманов. – Москва : Бинوم. Лаборатория знаний, 2014. – 381 с.
9. Федорова, Ю.В. Организация учебной деятельности учащегося в естественнонаучных предметах на базе применения средств информационных и телекоммуникационных технологий / Ю.В. Федорова // Информатизация образования школа XXI века : сборник Международной научно-практической конференции. – Турция, Белек. – 365 с.

#### REFERENCES

1. An encyclopedia for children. – Volume 11: Mathematics / editor-in-chief M.D. Aksenova. – Moscow : Avanta+, 2002. – 688 p.
2. Mordkovich, A.G. Algebra and the beginnings of mathematical analysis : textbook 11th grade / A.G. Mordkovich, P.V. Semenov. – 2nd ed., erased. – Moscow : Mnemosyne, 2020. – 311 p.
3. Written, D.T. Lecture notes on higher mathematics: a complete course / D.T. Written. – 9th ed. – Moscow : Iris-press, 2009. – 608 p.
4. Fadeev, D.K. Elements of higher mathematics for schoolchildren / D.K. Fadeev, M.S. Nikulin, I.F. Sokolovsky. – Moscow : Nauka, Main editorial Office of physical and Mathematical literature, 1987. – 336 p.
5. Wikipedia portal // Simpson's Formula : an article. – URL : [https://ru.wikipedia.org/wiki/Формула\\_Simpson](https://ru.wikipedia.org/wiki/Формула_Simpson) (date of reference: 10/23/2023).
6. Tishin, V.I. Informatics and Mathematics: in 3 parts / V.I. Tishin. – Moscow : Binom. Laboratory of Knowledge, 2019. – 240 p. (part 1), 112 p. (part 2), 364 p. (Part 3).
7. Startseva, N.A. Information technologies in mathematics lessons / N.A. Startseva. – Moscow : Institute of Electronic Software and Methodological Training Tools of the Russian Academy of Sciences, 2010. – 150 p.
8. Suleymanov, R.R. Computer modeling of mathematical problems / R.R. Suleymanov. – Moscow : Binom. Laboratory of Knowledge, 2014. – 381 p.
9. Fedorova, Yu.V. Organization of student's educational activities in natural science subjects based on the use of information and telecommunication technologies / Yu.V. Fedorova // Informatization of education school of the XXI century : collection of the International scientific and practical conference. – Turkey, Belek. – 365 p.

#### **Информация об авторе:**

Марина Николаевна Симакова – учитель математики высшей категории, руководитель методического объединения учителей математики лицея

#### **Information about the author:**

Marina Nikolaevna Simakova – teacher of mathematics of the highest category, the head of the methodical association of teachers of mathematics of the lyceum

Статья поступила в редакцию: 03.10.2023; одобрена после рецензирования: 15.11.2023; принята к публикации: 01.12.2023  
The article was submitted to the editorial office: 03.10.2023; approved after review: 15.11.2023; accepted for publication: 01.12.2023