

## Моделирование волн на глубокой воде

Аспирант кафедры информатики Сахалинского Государственного Университета  
Симаков Егор Евгеньевич

В статье обозначена проблема моделирования волновых процессов. Предпринята попытка сформулировать идею создания алгоритма для построения реалистичной модели волновых процессов на глубокой воде, основанного на трохойдальной теории, а также выведены основные соотношения, необходимые для моделирования океанических процессов. Рассмотрена возможность создания компьютерной модели. В дальнейшем будет предпринята попытка усовершенствовать существующие методы с целью получения более реалистичных моделей.

### 1. Введение

Моделирование различных природных явлений, в том числе, океанической поверхности и волновых процессов вызывало и вызывает большой интерес. Используя современные языки программирования и средства обработки компьютерной графики можно добиться хороших результатов в области компьютерного моделирования. В то же время, дальнейшее развитие уже существующих волновых теорий позволит исследовать данную проблему с точки зрения математики и физики. Совместное исследование в этих двух направлениях может помочь в создании реалистичной модели волн. Основной целью, которую преследовал автор при написании данной статьи, является демонстрация возможности построения реалистичных математических и компьютерных моделей волновых процессов для их дальнейшего практического применения.

Актуальность рассматриваемой темы заключается в том, что результаты подобных экспериментов широко используются во многих сферах деятельности: виртуальная реальность, фильмы и игры, океанографические изыскания и т.д. Существует множество программных продуктов, результатами работы которых являются красивые картинки и анимация. Однако по-прежнему остается необходимость в моделях с реалистичными характеристиками волн.

### 2. Трохойдальные волны

Для создания модели любого объекта или явления, прежде всего, необходимо выявить закономерности между его основными характеристиками. При моделировании океанических процессов используется некая идеальная волна, т.к. соотношения между элементами реальных волн довольно сильно различаются. В качестве такой волны может быть выбрана трохойдальная. Это двумерная волна, частицы которой вращаются по правильным окружностям. При этом частицы, находящиеся на одной вертикали, колеблются синфазно.

Рассмотрим координатную плоскость: ось ОХ направлена горизонтально, ОУ – вертикально вверх. Воспользуемся координатами Лагранжа, обозначим их а и b. Рассмотрим некое движение частицы, обладающей параметрами а и b:

$$\begin{cases} x = a + \text{Re}^{kb} \sin(ka + \sigma t) \\ y = b - \text{Re}^{kb} \cos(ka + \sigma t). \end{cases} \quad (1)$$

Данная система удовлетворяет уравнению неразрывности, также для нее выполняются основные уравнения движения:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Умножим первое уравнение системы (2) на  $dx$ , а второе на  $dy$  и, учитывая что  $X = 0, Y = -g$ , получим:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dx + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dy + g dy + \frac{1}{\rho} dp = 0. \quad (3)$$

Проинтегрируем уравнение (3). Т.к. на свободной поверхности жидкости давление должно быть постоянным, то:

$$\frac{p_0}{\rho} = -gb + \left(g - \frac{\sigma^2}{k}\right) \text{Re}^{kb} \cos(ka + \sigma t) + \frac{\sigma^2 R^2 e^{2kb}}{2} + C \quad (4)$$

Если положить  $t=0$ , то:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= gk \\ \frac{p_0}{\rho} &= -gb + \frac{\sigma^2 R^2 e^{2kb}}{2} + C. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, для частиц, составляющих свободную поверхность, параметр b должен иметь одно и то же значение. Положив  $b=0$  и вычитая результат из уравнения (4), получим:

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -gb - \frac{\sigma^2 R^2}{2} (1 - e^{2kb}). \quad (6)$$

Полученные уравнения (1) и (6) определяют волновое движение, удовлетворяющее как

точным дифференциальным уравнениям, так и условию на свободной поверхности.

### 3. Основные свойства трохоидальных волн

Движение волны, описываемое полученными соотношениями, является вихревым. Для доказательства этого факта рассмотрим составляющие скорости:

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial x}{\partial t} = R\sigma e^{kb} \cos(ka + \sigma t) = -\sigma(y - b) \\ v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = R\sigma e^{kb} \sin(ka + \sigma t) = \sigma(x - a). \end{cases} \quad (7)$$

Откуда получаем:

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \sigma \left( 2 - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \quad (8)$$

Продифференцируем уравнения (1) по  $x$ , считая правые части сложными функциями от  $x$  и  $y$ . Решим полученные уравнения. В результате получим:

$$\Omega_z = -\frac{2\sigma k^2 R^2 e^{2kb}}{1 - k^2 R^2 e^{2kb}} \quad (9)$$

Вихрь получился отличным от нуля, т.е. движение является вихревым. Кроме того, из полученного выражения видно, что на поверхности вихрь является наибольшим, а при  $b \rightarrow -\infty$  (удалению вглубь жидкости) вихрь стремится к нулю.

Проанализируем полученное движение. На свободной поверхности жидкости  $b=0$ , следовательно:

$$\begin{cases} x = a + R \sin(ka + \sigma t) \\ y = -R \cos(ka + \sigma t) \end{cases} \quad (10)$$

Профиль волны в момент времени  $t$  может быть представлен в параметрической форме системой (10), где  $a$  – параметр. Пусть  $t=0$ , тогда введя угол  $\theta = ka$ , получим уравнения трохойды:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{k} \theta + R \sin \theta \\ y = -R \cos \theta \end{cases} \quad (11)$$

Получим формулы, определяющие важнейшие свойства волны. Длина волны, следуя из геометрической интерпретации, может быть определена как длина окружности катящегося круга радиусом  $R$ , т.е.  $\lambda = 2\pi R$ . Используя

теорему Рэнкина, получим:  $\lambda = \frac{g\tau^2}{2\pi}$ . Кроме

того, из геометрической интерпретации можно определить скорость:  $c = \frac{\lambda}{\tau}$ .

Исходя из полученных равенств, определим скорость распространения и период волны

следующим образом:  $c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ ,  $\tau = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}$ .

Угловая скорость вращения частиц равна:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}}$$

Скорость движения элементарных частиц жидкости, определяемая через произведение частоты колебаний (круговой скорости) и радиуса

дуги траектории:  $V_r = \sigma r = \sigma \frac{h}{2} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z} = \sigma r_m e^{-kz}$ ,

возрастает с уменьшением глубины  $z$ . На вершине волны эти частицы перемещаются с максимальной скоростью в направлении движения ее гребня. Допустим, что скорость частиц жидкости не должна превышать скорости распространения корабельной волны, так как это является условием разрушения волнового гребня. В этом случае при скорости  $V_r = c$ , может быть получена оценка максимального

радиуса как  $r_m = \frac{l}{2p}$  или высоты волны как

$hk = 2$ , что соответствует острому гребню волны.

Аппроксимируя экспоненту отрезком прямой линии:  $\exp(k \times z') \gg 1 + k \times z$  и допуская, что на

вершине волны  $z = \frac{h}{2}$ , можно получить другое

приближение величины экстремальной амплитуды трохоидаальной волны:

$$hk = \sqrt{5} - 1 \approx 1.236.$$

Численное приближение дает предельную оценку теоретической высоты волны как:  $hk \gg 1.134$ . При построении прогрессивных волн на свободной поверхности эта оценка должна использоваться в качестве максимального радиуса трохойды. Численный расчет экстремумов для такой трохоидаальной волны, с учетом снижения амплитуды на подошве волны, приводит к оценке высоты волны

как:  $hk \gg 0.75$  или  $\frac{l}{h} \gg 8.38$ , что

соответствует прогрессивной волне с обрушающимся гребнем.

Полученная плоская трохоидаальная волна соответствует предельно возможному отношению амплитуды к длине прогрессивной штормовой

волны:  $h = \frac{0.375l}{P} \gg 0.12l$ . Максимальный

угол наклона поверхности такой волны достигает  $30^\circ$ , что представляет высокую опасность для корабля, и особенно, если он поддерживает штормовой ход навстречу волне. Практически всегда на взволнованной поверхности моря присутствуют волны подобной крутизны, о чем свидетельствуют вспененные на гребнях буруны.

И все же в штормовом море практически никогда не реализуются высокие волны более чем с двумя последовательно идущими крутыми гребнями, так как даже на начальных этапах зарождения ветровых волн, они начинают собираться в групповые структуры трехмерных пакетов волн. Ветровое волнение с длинами волн более 10 метров образуется только постепенным накоплением внешней энергии, и потому природа штормовых волн с большими периодами определяется динамическими свойствами их свободного распространения, что также связано с трансформацией плоских волн к трехмерному виду с ярко выраженной групповой структурой.

Для получения профиля групповой структуры трохоидальных волн можно воспользоваться наблюдениями за поведением реальных морских волн, которые всегда проявляются в виде пакетов из девяти одиночных волн. Для оценки формы пакета плоских волн используется сложение двух волновых колебаний с близкими частотами, что позволяет моделировать групповые структуры в виде волновых биений. Фазовые углы добавочной волны уменьшены с коэффициентом пропорциональности 0.889, амплитуда также снижена до уровня:

$$h_{доб} = \frac{h}{1.1342}, \text{ что не позволяет суммарной}$$

волновой трохоиде сделать петлю на вершине максимальной волны. Этот факт нельзя не учитывать.

Самая крупная в групповом пакете волна, называемая на море девятым валом, в динамике своего движения всегда проявляется как малоподвижная или стоячая волна. Стоячий девятый вал может иметь удвоенную высоту в сравнении с прогрессивной волной, отчего его угол склона вблизи гребня может достигать  $60^\circ$ . Но все же малая подвижность девятого вала делает его относительно безопасным для судна, штормующего без хода. Если же корабль поддерживает высокую скорость хода в условиях штормового волнения, то желательно, чтобы обводы его корпуса были адаптированы к

условиям жестких встреч с крутыми и высокими девятыми валами.

Создание моделей океанических волн на глубокой воде, удовлетворяющих выше упомянутым свойствам, является приоритетным направлением для дальнейшего исследования.

#### 4. Энергия трохоидальных волн

Рассмотрим вопрос об энергии волны и о процессе передачи этой энергии. Имеем две трохойды, соответствующие значениям  $b$  и  $b+db$ . Площадь фигуры, заключенной между ними и двумя вертикалями, отстоящими друг от друга на расстоянии  $\lambda$  (рис. 1), равна:

$S = \lambda(1 - k^2 R^2 e^{2kb})db$ . Центр тяжести частиц, составляющих эту площадь, лежит на прямой  $y=b$ . В равновесном положении эти частицы лежат на прямой  $y = b - \frac{\pi R^2 e^{2kb}}{\lambda}$ .

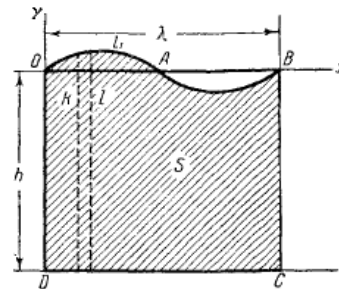


Рисунок 1. Вычисление энергии волны

Таким образом, потенциальная энергия этого слоя частиц равна

$$g\rho\lambda(1 - k^2 R^2 e^{2kb}) \frac{\pi R^2 e^{2kb}}{\lambda} db. \quad \text{Полная}$$

потенциальная энергия может быть определена следующим образом:

$$V = g\rho\pi R^2 \int_{-\infty}^0 (e^{2kb} - k^2 R^2 e^{4kb}) db = \frac{\lambda g \rho R^2}{4} \left( 1 - \frac{2\pi^2 R^2}{\lambda^2} \right) \quad (12)$$

Учитывая, что скорость каждой частицы  $r\sigma = \text{Re}^{kb} \sigma$ , кинетическая энергия, рассчитанная на длину волны, равна:

$$T = \frac{1}{2} \rho R^2 \sigma^2 \lambda \int_{-\infty}^0 e^{2kb} (1 - k^2 R^2 e^{2kb}) db = \frac{\lambda g \rho R^2}{4} \left( 1 - \frac{2\pi^2 R^2}{\lambda^2} \right) \quad (13)$$

В результате получили равенство кинетической и потенциальной энергии.

## 5. Алгоритмы для создания моделей океанического волнения

Основываясь на проведенных рассуждениях, можно построить математическую модель трохоидаальной волны. Существуют различные алгоритмы, позволяющие моделировать океанические процессы. Один из относительно простых алгоритмов основан на волнах Герстнера. Данный алгоритм позволяет построить несложную математическую модель, используя несколько важных волновых характеристик. Волны Герстнера были открыты как приближенное решение уравнений динамики жидкости и впервые использованы в области компьютерной графики в 1986г. в работах Фурнье и Ривза. Физическая модель сфокусирована на движении отдельных точек на поверхности. Если точки на спокойной поверхности имеют координаты  $(x_0; z_0)$ , соответствующая высота равна 0, то смещение точек при прохождении волны с амплитудой  $A$  можно выразить уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - kA \sin(kx_0 - \omega t) \\ y &= A \cos(kx_0 - \omega t), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновой вектор, задающий

направление движения волны.

В литературе, посвященной исследованиям в области океанографии, помимо волн Герстнера предлагается использовать статистические модели в сочетании с экспериментальными наблюдениями. В статистических моделях высота волны считается случайной величиной, зависящей от горизонтальной координаты и времени  $(h(x, t))$ . Данный метод основан на разложении волны на синусоидальную и косинусоидальную при помощи быстрого преобразования Фурье. Полученный алгоритм позволяет создать более реалистичную модель, так называемых, гравитационных волн.

## 6. Компьютерное моделирование волновых процессов

Современные средства программирования позволяют создать компьютерную модель, учитывающую большинство важнейших свойств реальной волны. Пример модели волны представлен ниже.

Таблица 1

Модель волны		
	Волна	Зыбь
Длина волны	60	100
Направление	10	-10
Высота	1.00	0.67

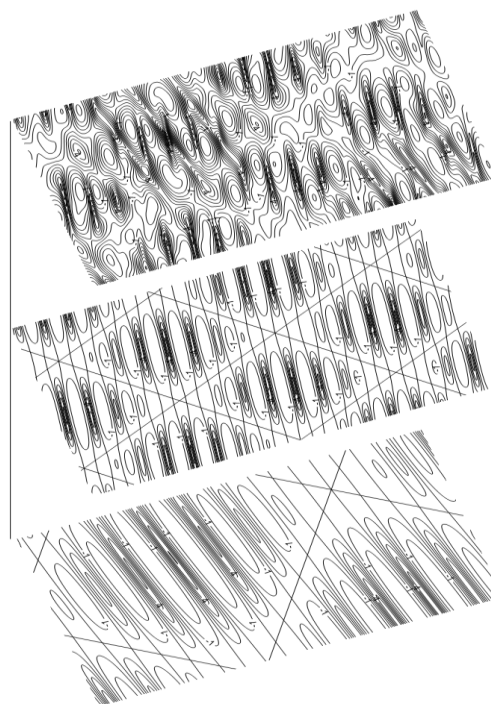


Рисунок 2. Модель волны

## 7. Заключение

В статье рассмотрены некоторые теоретические моменты расчета волн на глубокой воде, основываясь на которых можно моделировать океанические процессы. В дальнейшем будет предпринята попытка усовершенствовать существующие методы с целью получения более реалистичных моделей.

Реализация рассмотренных алгоритмов возможна при помощи одного из современных языков программирования и библиотеки для обработки компьютерной графики, например, C++ и OpenGL. Кроме того, используя фреймворк OpenGL, можно добиться уменьшения времени выполнения алгоритма при помощи распараллеливания вычислений. Интерфейс программирования приложений OpenGL может также помочь сэкономить процессорное время и, в дальнейшем, перенести программный код на различные гаджеты.

## Литература:

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.
2. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред. – М.: Издательство иностранной литературы, 1954.
3. Храмушин В.Н. История эволюции штормовой мореходности корабля. – Южно-Сахалинск: Сахалинское книжное издательство, 2004.
4. Tessendorf J. Simulating ocean water. – Los Angeles: SIGGRAPH Course Note, 2001.