Юный учёный

ISSN 2409-546X

международный научный журнал

3
Часть 1
2017

6+

ISSN 2409-546X

Юный ученый

Международный научный журнал
№ 3 (12) / 2017

На обложке изображен Лайнус Полинг (1901–1994) — американский химик, кристаллограф, лауреат двух Нобелевских премий: по химии (1954) и премии мира (1962).

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-61102 от 19 марта 2015 г.

Журнал размещается и индексируется на портале eLIBRARY.RU, на момент выхода номера в свет журнал не входит в РИНЦ.

Почтовый адрес редакции: 420126, г. Казань, ул. Амирхана, 10а, а/я 231.
Фактический адрес редакции: 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, д. 25.
E-mail: info@moluch.ru; http://www.moluch.ru/.
Учредитель и издатель: ООО «Издательство Молодой ученый».
Тираж 500 экз.. Дата выхода в свет: 10.07.2017. Цена свободная.

Отпечатано в типографии издательства «Молодой ученый», 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, д. 25.

СОДЕРЖАНИЕ

Применение ИКТ в геометрических и физических приложениях определённого интеграла

Стеблин Илья Александрович, учащийся 11 класса;

Научный руководитель: ***Симакова Марина Николаевна, учитель математики***
МБОУ Лицей № 1 г. Южно-Сахалинска

Выбор темы связан с информатизацией процесса обучения. Роль математического аппарата в решении задач по естественным дисциплинам нельзя переоценить. Без математической грамотности невозможно успешное освоение методов решения по физике, химии, биологии и другим предметам. Математика является также основой для такой науки, как информатика. Данная статья посвящена вопросам применения программирования в MathCAD, DevC++ для изучения геометрических и физических приложений определенного интеграла. Разработанные программы могут быть использованы для решения прикладных задач геометрии и физики.
Ключевые слова: *способ трапеций, способ средних прямоугольников, способ Симпсона, центр тяжести плоской фигуры, площадь криволинейной трапеции, MathCAD*

Цель исследования: изучить понятие определённого интеграла и его приложений. Реализовать решение задач с помощью программирования в DevC++ и в САПР MathCAD.

Задачи исследования:

1. Проанализировать литературу и обосновать внедрение ИКТ и программирования в решение прикладных задач на применение свойств определенного интеграла.

2. Выбрать некоторые методы решения прикладных задач, позволяющие глубоко изучить и усвоить приложения определенного интеграла.

3. Разработать некоторые аспекты методики решения прикладных задач на применение свойств определенного интеграла с применением информационных технологий. Проверить эффективность в опытно-экспериментальной работе с помощью изготовленных моделей.

Определим понятие численного интегрирования: под численным интегрированием понимают набор численных методов для нахождения значения определённого интеграла. Основная идея большинства методов численного интегрирования состоит в замене подынтегральной функции на более простую, интеграл от которой легко вычисляется аналитически.

Рассмотрим два первых способа вычисления определённого интеграла.

Способ трапеций. Промежуток интегрирования [*a*, *b*] разбивается на *n* равных частей точками $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$. Площадь каждой криволинейной трапеции между прямыми $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$ заменяется площадью прямолинейной трапеции, ограниченной сверху хордой, соединяющей точки графика с абсциссами x_{i-1} и x_i. Основаниями таких трапеций являются $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ и $y_i = f(x_i)$.

Способ средних прямоугольников. В качестве приближения к интегралу берется интегральная сумма, в которой значения подынтегральной функции берутся в серединах промежутков, на которые разделен промежуток интегрирования. Будем предполагать, что все эти промежутки имеют одинаковую длину, равную $\frac{b-a}{n}$, где *a* и *b* — пределы интегрирования, *n* — число частей. площадь прямоугольника равна площади трапеции, ограниченной промежутком [x_{i-1}, x_i], прямыми $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$ и касательной к графику *f*(*x*) в точке с абсциссой $\bar{x}_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$.

Если заменить график функции *y*= *f*(*x*) на каждом отрезке [x_{i-1}, x_i] разбиения не отрезками прямых, как в методах трапеций и средних прямоугольников, а дугами парабол, то получим более точную формулу вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Предварительно найдем площадь *S* криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком параболы $y = ax^2 + bx + c$, сбоку — прямыми $x = -h, x = h$ и снизу отрезком $[-h; h]$.

Получим теперь формулу парабол для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Для этого отрезок [*a*, *b*] разобьем на 2*n* равных частей (отрезков) длиной $h = \frac{b-a}{2n}$ точками $x_i = x_0 + ih \ (i = 0, 1, 2, \dots, 2n)$. В точках деления $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} = b$ вычисляем значения подынтегральной функции $f(x)$: $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$, где $y_i = f(x_i)$ (рисунок 1).

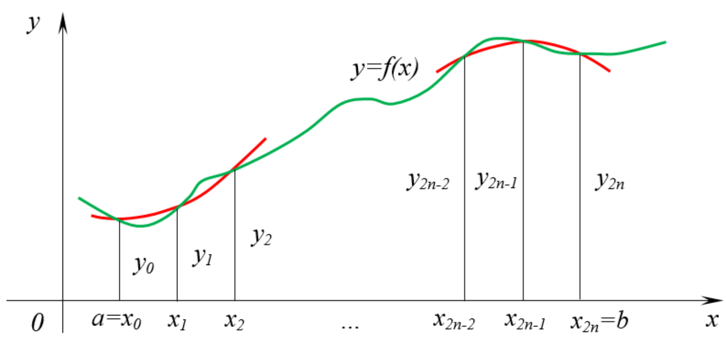

Рис. 1. Способ средних прямоугольников

Заменяем каждую пару соседних элементарных криволинейных трапеций с основаниями, равными *h*, одной элементарной параболической трапецией с основанием, равным 2*h*. На отрезке [x_0, x_2] парабола проходит через три точки $(x_0; y_0), (x_1; y_1), (x_2; y_2)$.

Приведем **пример реализации численного интегрирования методом Симпсона в среде программирования Dev C++.** Для начала разберём алгоритм на конкретном примере. Пусть была задана функция $f(x) = x^{\sin(x)}$ на интервале от 0 до 4, требуется найти значение определённого интеграла $\int_0^4 x^{\sin(x)}dx$. Даны только точки, принадлежащие графику функции. В таком случае через каждые тройки точек можно провести график какой-либо параболы ax^2+bx+c. Если построить график функции $f(x)=x^{\sin(x)}$ (выделен красным), то можно заметить, что параболы довольно точно описывают этот график (при достаточно большом числе разбиений):

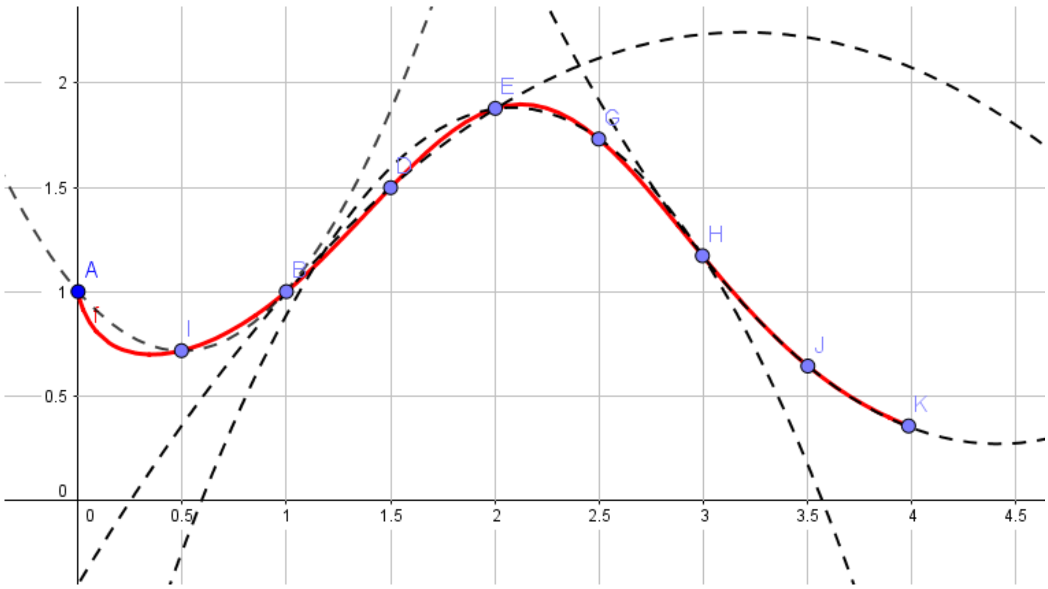

Рис. 2. Численное интегрирование методом Симпсона

Таким образом значение определённого интеграла складывается из значений определённого интеграла каждой из парабол на соответствующих интервалах.

Реализуем данный метод в среде программирования Dev C++. Формула для вычисления определённого интеграла $S=\int_{-h}^{h}(ax^2+bx+c)dx$:

$$S=\frac{2}{3}h^3\cdot\frac{1}{2h^2}(y_0-2y_1+y_2)+2h\cdot y_1=\frac{h}{3}(y_0-2y_1+y_2)+2hy_1=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2).$$

1. Объявляем массив, в котором будем хранить координаты точек, а также h и n — число точек. Изначально приближенное значение интеграла равно 0:

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main(){
    float A[10][2], h;
    int i, n;
    float integral=0.0;
```

2. Считываем число точек и координаты (x, y) для каждой точки:

```
cout << "VVEDITE CHISLO TOCHEK: ";
cin >> n;
cout << "VVEDITE KOORDINATY X, Y DLYA KAZHDOY TOCHKI:" << endl;
for(i=0; i<n; i++)
        cin >> A[i][0] >> A[i][1];
```

3. Для троек соседних точек считаем площадь под графиком параболы, которую они образуют, по соответствующим формулам из п. 1.5, заметим, что в этом случае указатель i на каждой итерации сдвигается на 2 ед.

```
for(i=2; i<n; i+=2){
    h=(A[i][0]-A[i-2][0])/2;
    integral += (A[i-2][1]+4*A[i-1][1]+A[i][1])*h;
    }
   integral /=3.0;
```

4. Осуществляем вывод полученного результата:

```
cout << "----------------" << endl;
cout << "S=" << integral << endl;
system("pause");
return 0;
}
```

Результат работы программы для случая, разобранного в примере:

```
UVEDITE CHISLO TOCHEK: 9
UVEDITE KOORDINATY X, Y DLYA KAZHDOY TOCHKI:
0 1
0.5 0.72
1 1
1.5 1.5
2 1.88
2.5 1.73
3 1.17
3.5 0.64
4 0.36
----------------
S=4.63667
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Рис. 3. Программа в Dev-C++, реализующая метод Симпсона

Точное значение интеграла $\int_0^4 x^{\sin(x)}dx = 4.614085\ldots$

Реализация вычисления площади поверхности и объёма тела вращения в САПР Mathcad

Пусть *y=f(x)* — непрерывная неотрицательная функция, заданная на интервале [*a, b*]. Представим себе тело, получающееся при вращении вокруг оси *OX* криволинейной трапеции, ограниченной функцией *y= f(x)*, прямыми $x = a, x = b$ и осью *OX*.

Перейдём к вычислению в САПР MathCAD:

Первым шагом задаём функцию *y=f(x)*, и интервал [*a, b*].

$f(x) := \cos(x) \qquad a := -1 \qquad b := 1$

Далее представляем вид криволинейной трапеции:

1. *Строим график функции y=f(x).*
2. *Добавляем вертикальные маркеры, и записываем в них значения a и b, они представляют собой прямые* $x = a, x = b$.

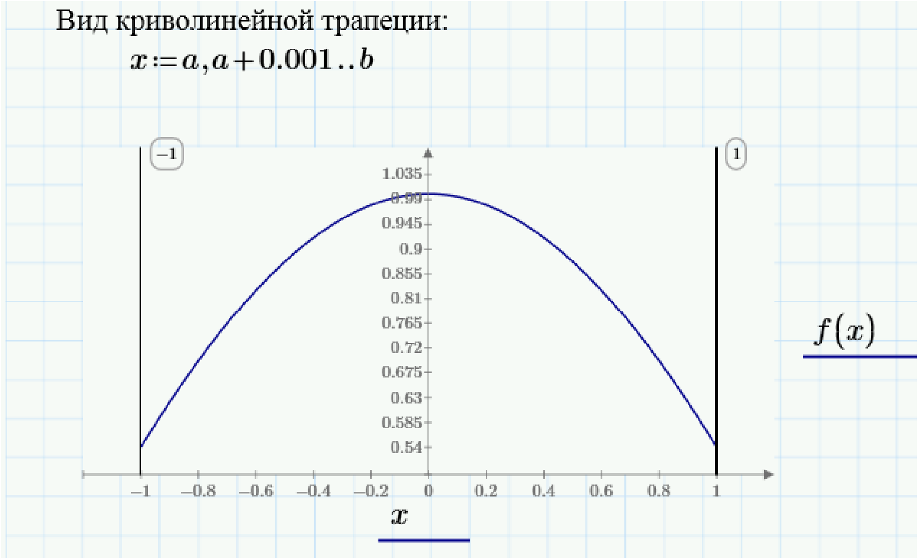

Рис. 4. Построение криволинейной трапеции в MathCAD Prime 3.1

Теперь представим тело, полученное вращением данной криволинейной трапеции вокруг оси *OX*. Для этого следует использовать цилиндрические системы координат.

Цилиндрической системой координат называют трёхмерную систему координат, являющуюся расширением полярной системы координат путём добавления третьей координаты, которая задаёт высоту точки над плоскостью. Какая-либо точка *P* будет задаваться как (ρ, φ, z).

$\rho \geq 0$ — расстояние от *P* до оси *Z*,

$0 \leq \varphi \leq 360^0$– угол между осью *X* и отрезком O*P*', где *P*' — проекция точки *P* на плоскость *XOY*, z — аппликата точки *P*.

Для построения тела вращения будем использовать параметрические уравнения для перехода к цилиндрической системе координат:

$$x1(x, fi) := x$$
$$y1(x, fi) := f(x) \cdot \cos(fi)$$
$$z1(x, fi) := f(x) \cdot \sin(fi)$$

Далее построим поверхность тела вращения, используя функцию *CreateMesh:*

$$s1 := \mathrm{CreateMesh}(x1, y1, z1, a, b, 0, 2\pi, 50)$$

x1, y1, z1 — матрицы значений для каждой координаты, *a* — нижняя граница значений переменной *x*, *b* — верхняя граница значений переменной *x*; 0 и 2π — верхняя и нижняя граница угла поворота точки графика; 50 — количество линий в сетке графика.

Вид полученного *3-d* графика:

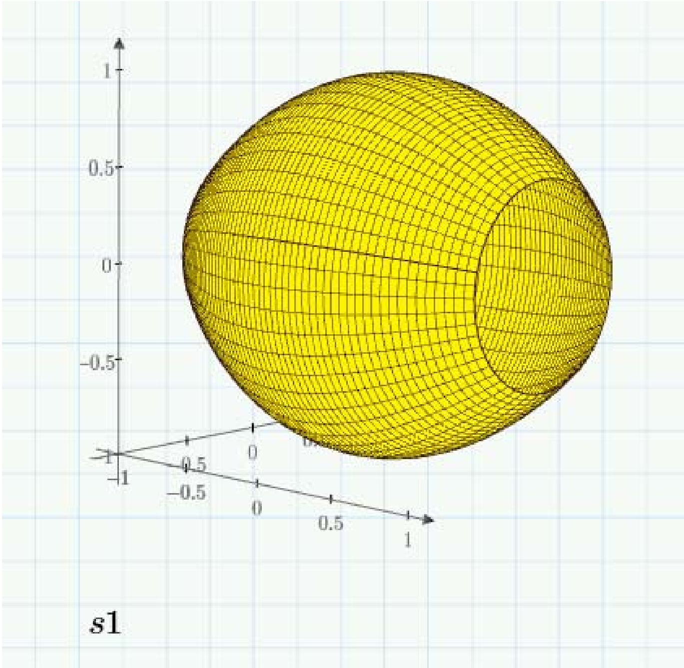

Рис. 5. Построение тела вращения в MathCAD Prime 3.1

Далее для вычисления объёма тела вращения используем формулу $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$, значение данного интеграла вычисляем по формуле Симпсона.

Задаём число разбиений, которое обязательно должно быть чётным. И вычисляем длину отрезка разбиения:

Вычисление объёма с применением формулы Симпсона:

$$n := 200$$

$$h := \frac{b-a}{n} = 0.01$$

Для вычисления значения определённого интеграла используем операторы программирования. Задаём значение $xi = x_1$, вычисляем значение $sum1 = y_1 + y_{2n}$:

$$V := \left\| \begin{array}{l} xi \leftarrow a+h \\ sum1 \leftarrow \pi \cdot (f(a))^2 + \pi \cdot (f(b))^2 \end{array} \right.$$

С помощью цикла *while* вычисляем значение $sum2 = y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}$:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{while } xi \le b-h \\ \quad \left\| \begin{array}{l} sum2 \leftarrow sum2 + \pi \cdot (f(xi))^2 \\ xi \leftarrow xi + 2\ h \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Теперь переменной xi присваиваем значение x_2, и вычисляем значение $sum3 = y_2 + y_4 + \dots + y_n$:

$$\left\| \begin{array}{l} xi \leftarrow a + 2\ h \\ \text{while } xi \le (b - 2\ h) \\ \quad \left\| \begin{array}{l} sum3 \leftarrow sum3 + \pi \cdot (f(xi))^2 \\ xi \leftarrow xi + 2\ h \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Последним шагом переменной Vol присваиваем значение определённого интеграла, вычисленное согласно формуле Симпсона:

$$\left\| \begin{array}{l} Vol \leftarrow \frac{h}{3}\ (sum1 + 4\ sum2 + 2\ sum3) \\ Vol \end{array} \right.$$

Записываем ответ:

Ответ: $V = 4.551$

Для нахождения площади боковой поверхности используем тот же алгоритм, но сначала требуется найти производную функции, т. к. для формулы $S = \int_a^b 2\pi y\, dl = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\, dx$ требуется значение производной:

Вычисление площади боковой поверхности:

$$g(x) := \frac{d}{dx} f(x) \to -\sin(x)$$

Далее рассуждения аналогичны.

Теперь вычислим точное значение интегралов $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ и $S = \int_a^b 2\pi y\, dl = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\, dx$ для того, чтобы оценить погрешность полученного значения, вычисленного по формуле Симпсона. При увеличении числа разбиений будет получаться значение более близкое к точному значению интеграла:

Ответ: $V = 4.551$

Точное значение V= $\pi \int_a^b (f(x))^2\, dx = 4.57$

Ответ: $S = 11.625$

Точное значение S= $2\,\pi \int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(g(x))^2}\, dx = 11.715$

Реализация вычисления статических моментов и координат центра

Далее **перейдём к физическому приложению интеграла**, а именно к его применению в теоретической механике.

Пусть на плоскости *Oxy* задана система материальных точек $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \dots, M_n(x_n; y_n)$ соответственно с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Статическим моментом S_x системы материальных точек относительно оси *Ox* называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты (на расстояния этих точек от оси *Ox*): $S_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i$. Аналогично определяется статистический момент S_y этой системы относительно оси *Oy*: $S_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$. Если массы распределены непрерывным образом вдоль некоторой кривой, то для выражения статистического момента понадобится интегрирование.

Пусть $y = f(x) (a \le x \le b)$ — это уравнение материальной кривой AB. Будем считать её однородной с постоянной линейной плотностью $\gamma (\gamma = Const)$. Статические моменты S_x и S_y кривой позволяют установить положение её центра тяжести (центра масс).

Центром тяжести материальной плоской кривой $y = f(x), x \in [a, b]$ называется точка плоскости, обладающая следующим свойством: если в этой точке сосредоточить всю массу m заданной кривой, то статистический момент этой точки относительно любой координатной оси будет равен статистическому моменту всей кривой $y = f(x)$ относительно той же оси. Обозначим через $C(x_c; y_c)$ центр тяжести кривой AB.

Определим теперь **формулы для вычисления статистических моментов и координат центра тяжести плоской фигуры**:

Пусть дана материальная плоская фигура (пластинка), ограниченная кривой $y = f(x) \ge 0$ и прямыми $y = 0, x = a, x = b$. Будем считать, что поверхностная плотность пластинки постоянна $(\gamma = Const)$. По аналогии с плоской кривой получаем, обозначив координаты центра тяжести плоской фигуры (пластинки) через $C(x_c; y_c)$, что $m \cdot x_c = S_y$ и $m \cdot y_c = S_x$.

Перейдём к **реализации данных методов в САПР MathCAD**.

1. Задаём кривую и интервал, на котором она рассматривается:

1. Плоская кривая: $f(x) := x^{3\cos(x)}$

$a := 0$

$b := 5$

2. Находим производную функции:

$$g(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 3 \cdot x^{3 \cdot \cos(x) - 1} \cdot \cos(x) - 3 \cdot x^{3 \cdot \cos(x)} \cdot \ln(x) \cdot \sin(x)$$

3. Согласно формулам находим координаты центра тяжести плоской кривой:

$$xc := \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (g(x))^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (g(x))^2}\, dx} = 3.156 \qquad yc := \frac{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (g(x))^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (g(x))^2}\, dx} = 1.073$$

4. Конечный результат представляем в виде графика (красная точка — центр тяжести).

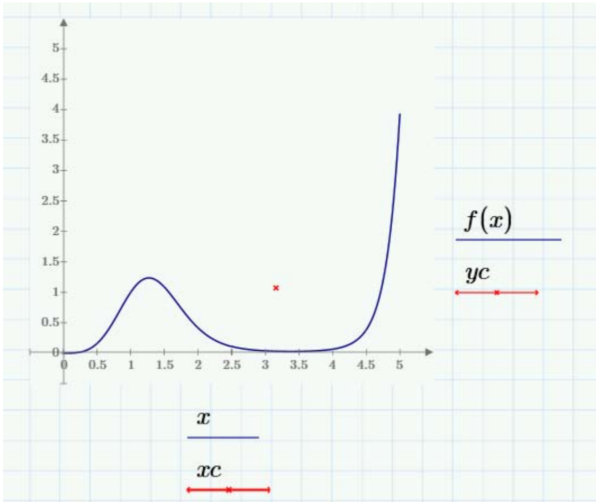

Рис. 6. Определение центра тяжести плоской кривой в MathCAD Prime 3.1

5. Для вычисления центра тяжести плоской фигуры делаем аналогичные шаги.

2. Плоская фигура: $f(x) := \sqrt{x^{\cos(x)}}$ $\quad a := 0 \quad b := 9 \qquad x := a, a + 0.001 .. b$

$f(x)$

$$xc := \frac{\int_a^b x \cdot f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx} = 5.045 \qquad yc := \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx} = 0.741$$

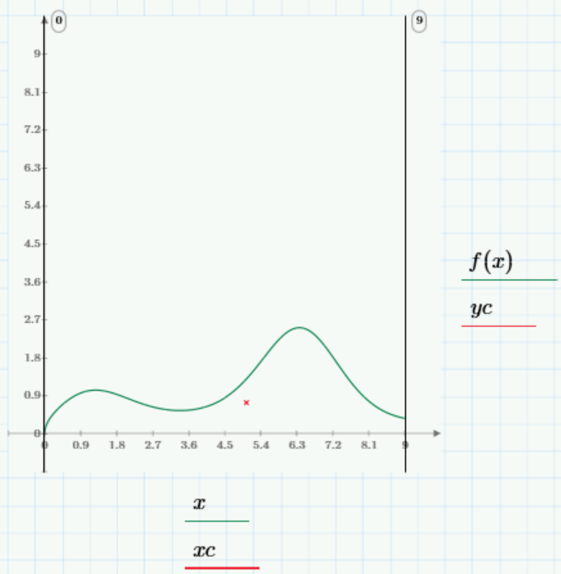

Рис. 7. Определение центра тяжести плоской фигуры в MathCAD Prime 3.1

Заключение

Рассмотренные в работе методы приближенного вычисления интеграла позволяют вычислять его значения, если подынтегральная функция задана в виде массива значений, или же подынтегральная функция настолько сложна, что вычисление её первообразной является довольно трудоёмким процессом. Наиболее точным методом является формула Симпсона. Применение информационных технологий позволяет с большой точностью вычислять значения интегралов рассмотренными способами, благодаря возможности большого числа разбиений отрезка интегрирования функции.

Помимо этого, было рассмотрено применение интеграла для вычисления объёма и площади боковой поверхности произвольного тела вращения, далее данные методы были реализованы в САПР MathCAD. Рассмотренные методы можно использовать при решении геометрических задач.

Немаловажным является рассмотрение физического приложения интеграла, а именно его применение в теоретической механике. Реализовано нахождение центра тяжести плоских кривых и фигур в САПР MathCAD. Для демонстрации была изготовлена модель плоской пластины и найдена координата её центра тяжести. Проведённый эксперимент подтвердил эффективность применения информационных технологий для решения задач, основывающихся на физическом приложении определённого интеграла.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Аксенова, М.Д. Энциклопедия для детей. Том 11. Математика. — М.: Аванта+, 2002.
2. Мордкович, А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа, учебник 11 класс. — 2-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2014.
3. Фадеев, Д.К., Никулин М.С., Соколовский И.Ф. Элементы высшей математики для школьников. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1987..
4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. — 9-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2009.
5. Информационный портал Wikipedia [Электронный ресурс]. URL: https://ru. wikipedia. org/wiki/ Формула_ Симпсона (Дата обращения: 15.01.2017 г.)