Юный учёный

ISSN 2409-546X

международный научный журнал

6
Часть II
2016

6+

ISSN 2409-546X

Юный учёный

Международный научный журнал
№ 3 (06) / 2016

На обложке изображен Марк Эллиот Цукерберг (род. в 1984 г.) — американский программист и предприниматель, один из разработчиков и основателей социальной сети Facebook. Руководитель компании Facebook Inc.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77–61102 от 19 марта 2015 г.

Журнал входит в систему РИНЦ (Российский индекс научного цитирования) на платформе elibrary.ru.

Почтовый адрес редакции: 420126, г. Казань, ул. Амирхана, 10а, а/я 231.
Фактический адрес редакции: 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, д. 25.
E-mail: info@moluch.ru; http://www.moluch.ru/.
Учредитель и издатель: ООО «Издательство Молодой ученый».
Тираж 500 экз. Дата выхода в свет: 10.06.2016. Цена свободная.

Отпечатано в типографии издательства «Молодой ученый», 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, д. 25.

СОДЕРЖАНИЕ

ХИМИЯ

БИОЛОГИЯ

ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ

ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА

ПРОЧЕЕ

Методы решения нелинейных уравнений

Воронова Мария Евгеньевна, учащаяся 10 класса

Научный руководитель: Симакова Марина Николаевна, учитель математики
Научный руководитель: Симаков Егор Евгеньевич, учитель информатики и ИКТ
МБОУ Лицей № 1 г.Южно-Сахалинска

Статья посвящена изучению методов решения нелинейных уравнений, в том числе, с использованием системы автоматизированного проектирования MathCAD. Рассмотрены шаговый метод, методы половинного деления и Ньютона, приведены подробные алгоритмы применения данных методов, а также проведен сравнительный анализ указанных методов.

***Ключевые слова**: нелинейные уравнения, прикладная математика, САПР MathCAD, метод Ньютона, шаговый метод, метод дихотомии.*

Цель работы: изучить методы решения нелинейных уравнений с одним неизвестным и апробировать их в опытно-экспериментальной работе.

Задачи работы:

1. Проанализировать специальную литературу и выбрать наиболее рациональные способы решения нелинейных уравнений, позволяющие глубоко изучить и усвоить данную тему всем выпускникам средней школы.
2. Разработать некоторые аспекты методики решения нелинейных уравнений с применением ИКТ.
3. Изучить методы решения нелинейных уравнений:

— Шаговый метод
— Метод деления пополам
— Метод Ньютона
— PTC Mathcad

Введение.

Без математической грамотности невозможно успешное освоение методов решения задач по физике, химии, биологии и другим предметам. Весь комплекс естественных наук построен и развивается на базе математических знаний. Например, исследование ряда актуальных задач математической физики приводит к необходимости решения нелинейных уравнений. Решение нелинейных уравнений необходимо в нелинейной оптике, физике плазмы, теории сверхпроводимости и физике низких температур. По этой теме есть достаточное количество литературы, но во многих учебниках и статьях трудно разобраться ученику средней школы. В данной работе рассмотрены методы решения нелинейных уравнений, которые можно использовать при решении прикладных задач физики, химии. Интересным представляется аспект применения информационных технологий к решению уравнений и задач по математике.

Шаговый метод.

Пусть требуется решить нелинейное уравнение вида уравнение F(x) =0. Предположим также, что нам задан некоторый интервал поиска [x0, x1]. Требуется найти интервал [a, b] длиной h, содержащий первый корень уравнения, начиная с левой границы интервала поиска.

Решить подобную задачу можно несколькими способами. Шаговый метод является наиболее простым из численных методов решения неравенств, но для достижения большой точности необходимо существенно уменьшить шаг, а это сильно увеличивает время расчётов. Алгоритм решения уравнений с помощью данного метода состоит из двух этапов.

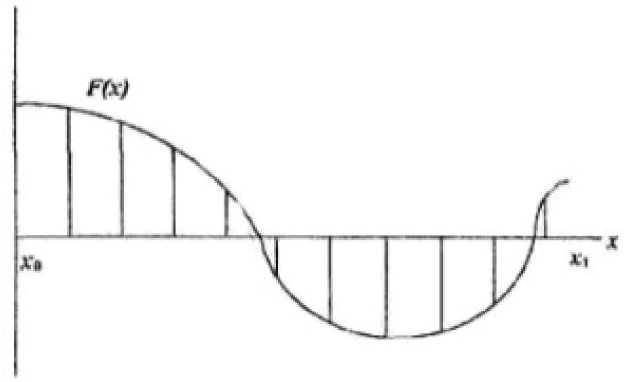

Рис. 1. Шаговый метод

I этап. Отделение корней.

На этом этапе определяются участки, на каждом из которых находится только один корень уравнения. Есть несколько вариантов реализации этого этапа:

• Подставляем значения X (желательно с каким-то достаточно мелким шагом) и смотрим где функция сменит знак. Если функция сменила знак, это значит, что на участке между предыдущим и текущим значением X лежит корень (если функция не меняет характер возрастания/убывания, то можно утверждать, что корень на этом интервале один).

• Графический метод. Строим график и оцениваем на каких интервалах лежит один корень.

• Исследуем свойства конкретной функции.

II этап. Уточнение корней.

На данном этапе значение корней уравнения, определенных ранее, уточняется. Как правило на этом этапе используются итерационные методы. Например, метод половинного деления (дихотомии) или метод Ньютона.

Метод половинного деления

Быстрый и достаточно простой численный метод решения уравнений, основанный на последовательном сужении интервала, содержащего единственный корень уравнения F(x) =0 до того времени, пока не будет достигнута заданная точность Е. Данный метод обычно используется при решении квадратных уравнений и уравнений высших степеней. Однако у данного метода есть существенный недостаток — если на отрезке [a, b] содержится более одного корня, то с его помощью не удастся добиться хороших результатов.

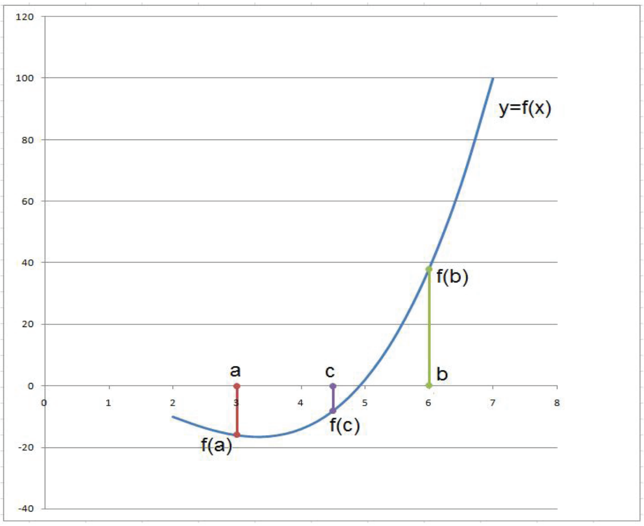

Рис. 2. Метод дихотомии

Алгоритм данного метода следующий:

— Определить новое приближение корня x в середине отрезка [a; b]: x= (a+b) /2.
— Найти значения функции в точках a и x: F(a) и F(x).
— Проверить условие F(a) *F(x) < 0. Если условие выполнено, то корень расположен на отрезке [a; x]. В этом случае необходимо точку b переместить в точку x (b=x). Если условие не выполнено, то корень расположен на отрезке [x; b]. В этом случае необходимо точку a переместить в точку x(a=x).
— Перейти к пункту 1 и вновь поделить отрезок пополам. Алгоритм продолжить до того времени, пока не будет выполнено условие |F(x) | < E.

Метод Ньютона

Самый точный из численных методов решения; подходит для решения очень сложных уравнений, но усложняется необходимостью вычисления производных на каждом шаге. заключается в том, что если x_n — некоторое приближение к корню уравнения $f(x)=0,\ f\in C^1$, то следующее приближение определяется как корень касательной к функции f(x), проведенной в точке x_n.

Уравнение касательной к функции f(x) в точке x_n имеет вид:

$$f'(x_j)=\frac{y-f(x_n)}{x-x_n}.$$

В уравнении касательной положим y = 0 и $x = x_{n+1}$.

Тогда алгоритм последовательных вычислений в методе Ньютона состоит в следующем:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Сходимость метода касательных квадратичная, порядок сходимости равен 2.

Таким образом, сходимость метода касательных Ньютона очень быстрая.

Без всяких изменений метод обобщается на комплексный случай. Если корень x_i является корнем второй кратности и выше, то порядок сходимости падает и становится линейным.

К недостаткам метода Ньютона следует отнести его локальность, поскольку он гарантированно сходится при произвольном стартовом приближении только, если везде выполнено условие $|ff''|/(f'^2)<1,$ в противной ситуации сходимость есть лишь в некоторой окрестности корня.

Метод Ньютона (метод касательных) обычно применяется в том случае, если уравнение *f(x) = 0* имеет корень $x\in[a;b]$, и выполняются условия:

1) функция *y= f(x)* определена и непрерывна при $x\in(-\infty;+\infty)$;
2) *f(a) · f(b) < 0* (функция принимает значения разных знаков на концах отрезка [*a; b*]);
3) производные *f'(x)* и *f"(x)* сохраняют знак на отрезке [*a; b*] (т. е. функция *f(x)* либо возрастает, либо убывает на отрезке [*a; b*], сохраняя при этом направление выпуклости);
4) $f'(x)\neq 0$ при $x\in[a;b]$.

Смысл метода заключается в следующем: на отрезке [*a; b*] выбирается такое число x_0, при котором $f(x_0)$ имеет тот же знак, что и $f''(x_0)$, т. е. выполняется условие $f(x_0)\cdot f''(x)>0$. Таким образом, выбирается точка с абсциссой x_0, в которой касательная к кривой *y = f(x)* на отрезке [*a; b*] пересекает ось *Ox*. За точку x_0 сначала удобно выбирать один из концов отрезка.

Рассмотрим данный алгоритм на конкретном примере.

Пусть нам дана возрастающая функция $y = f(x) = x^2-2$, непрерывная на отрезке (0;2), и имеющая $f'(x) = 2x > 0$ и $f''(x) = 2 > 0$.

В нашем случае уравнение касательной имеет вид: $y-y_0 = 2x_0\cdot(x - x_0)$. В качестве точки x_0 выбираем точку $B_1\ (b; f(b)) = (2,2)$. Проводим касательную к функции *y = f(x)* в точке B_1, и обозначаем точку пересечения касательной и оси *Ox* точкой x_1. Получаем уравнение первой касательной: $y - 2 = 2\cdot 2(x - 2)$, $y = 4x - 6$. Точка пересечения касательной и оси *Ox*: $x_1 = \frac{6}{4}=1,5$.

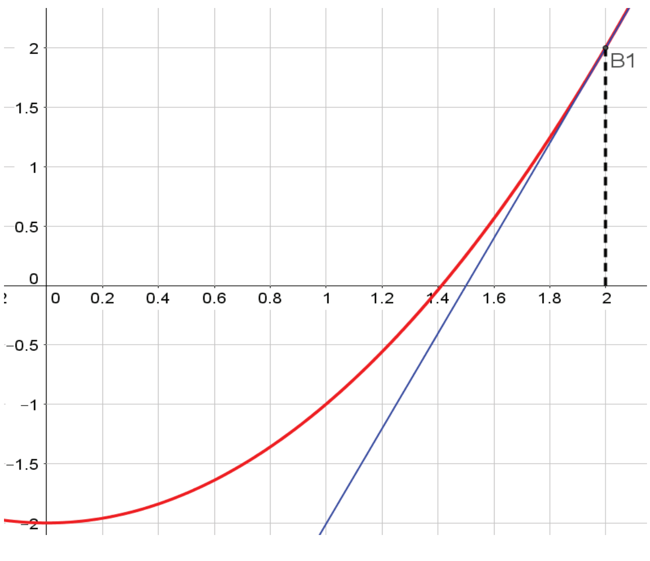

Рис. 3. Построение первой касательной к графику функции *f*(*x*)

Затем находим точку пересечения функции $y = f(x)$ и перпендикуляра, проведенного к оси Ox через точку x_1, получаем точку $B_2 = (1.5; 0.25)$. Снова проводим касательную к функции $y = f(x)$ в точке B_2, и обозначаем точку пересечения касательной и Ox точкой x_2.

Уравнение второй касательной: $y - 2.25 = 2*1.5(x - 1.5)$, $y = 3x - 4.25$. Точка пересечения касательной и оси Ox:

$$x_2 = \frac{4,25}{3}.$$

Затем находим точку пересечения функции $y = f(x)$ и перпендикуляра, проведенного к оси Ox через точку x_2, получаем точку B_3 и так далее.

$$B3 = \left(\frac{4,25}{3}; \frac{4,25^2}{9}\right)$$

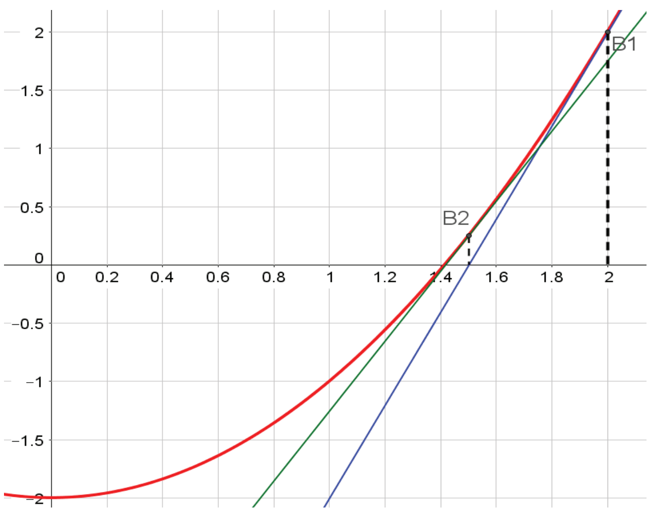

Рис. 4. Построение второй касательной к графику функции $f(x)$

Первое приближение корня определяется по формуле:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1,5.$$

Второе приближение корня определяется по формуле:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{4,25}{3} \approx 1,416.$$

Третье приближение корня определяется по формуле:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 1,414215.$$

Таким образом, i-ое приближение корня определяется по формуле:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}.$$

Вычисления ведутся до тех пор, пока не будет достигнуто совпадение десятичных знаков, которые необходимы в ответе, или заданной точности е — до выполнения неравенства $|xi - xi - 1| < e$.

В нашем случае, сравним приближение, полученное на третьем шаге с реальным ответом. Как видно, уже на третьем шаге мы получили погрешность меньше 0,000002.

$$\sqrt{2} \approx 1,414213.$$

$$x_3 \approx 1,414215.$$

Решение уравнения при помощи САПР MathCAD

Для простейших уравнений вида $f(x) = 0$ решение в MathCAD находится с помощью функции *root*.

root (*f* (*x*1, *x*², …), *x*1, *a*, *b*) — возвращает значение ***x*1**, принадлежащее отрезку **[*a*, *b*],** при котором выражение или функция ***f*(*x*)** обращается в 0. Оба аргумента этой функции должны быть скалярами. Функция возвращает скаляр.

$$f(x) := x^3 - 0.2\,x^2 + 0.5\,x + 1.5$$

$$x := 0$$

$$\mathbf{root}(f(x), x) = -0.946$$

Рис. 5. Решение нелинейного уравнения в MathCAD (функция root)

Если в результате применения данной функции возникает ошибка, то это может означать, что уравнение не имеет корней, или корни уравнения расположены далеко от начального приближения, выражение имеет локальные *max* и *min* между начальным приближением и корнями.

Чтобы установить причину ошибки, необходимо исследовать график функции $f(x)$. Он поможет выяснить наличие корней уравнения $f(x) = 0$ и, если они есть, то определить приблизительно их значения. Чем точнее выбрано начальное приближение корня, тем быстрее будет *найдено его точное значение*.

Если начальное приближение неизвестно, то целесообразно использовать функцию ***solve***. При этом если уравнение содержит несколько переменных, нужно указать после ключевого слова solve список переменных, относительно которых решается уравнение.

$$x^3 + 5\,x^2 - 16\,x - 80 \xrightarrow{solve} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\sin(x)^2 - 5 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + 6 \cdot \cos(x)^2 = 0 \xrightarrow{solve} \begin{bmatrix} 2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ 2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{10}}{3} - \frac{1}{3}\right) \\ 2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right) - \pi \\ 2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{3}{\sqrt{10}+1}\right) - \pi \end{bmatrix}$$

Рис. 6. Решение нелинейного уравнения в MathCAD (функция solve)

Заключение

В ходе исследования были рассмотрены как математические методы, так и решение уравнений с использованием программирования в САПР MathCAD. Различные методы имеют свои достоинства и недостатки. Следует отметить, что применение того или иного метода зависит от начальных условий заданного уравнения. Те уравнения, которые хорошо решаются известными в школе методами разложения на множители и т. п., не имеет смысла решать более сложными способами. Прикладные задачи математики, важные для физики, химии и требующие сложных вычислительных операций при решении уравнений успешно решаются, например, с помощью программирования. Их же хорошо решать методом Ньютона.

Для уточнения корней можно применять несколько методов решения одного и того же уравнения. Именно это исследование и легло в основу данной работы. При этом легко проследить, какой метод наиболее удачен при решении каждого этапа уравнения, а какой метод на данном этапе лучше не применять.

Изученный материал, с одной стороны, способствует расширению и углублению математических знаний, привитию интереса к математике. С другой стороны, задачи реальной математики важно уметь решать тем, кто собирается приобрести профессии технического и инженерного направления. Поэтому данная работа имеет значение для дальнейшего образования (например, в высшем учебном заведении).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Митяков С. Н. Информатика. Комплекс учебно-методических материалов. — Н. Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т, 2006
2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 527 с.
3. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов — М.: Наука, 1986.
4. Омельченко В. П., Курбатова Э. В. Математика: учебное пособие. — Ростов н/Д.: Феникс, 2005.
5. Савин А. П. Энциклопедический словарь юного математика. — М.: Педагогика, 1989.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математики для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1973.
7. Кирьянов Д. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. — СПб.: БХВ-Петербург, 2012.
8. Черняк А., Черняк Ж., Доманова Ю. Высшая математика на базе Mathcad. Общий курс. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
9. Поршнев С., Беленкова И. Численные методы на базе Mathcad. — СПб.: БХВ-Петербург, 2012.